



**ANALISIS STRUKTUR BETON BERTULANG DENGAN
PENDEKATAN *SMEARED CRACK* DAN *SMEARED ELEMENT*
MENGUNAKAN METODE ELEMEN HINGGA**

TESIS

Disusun Dalam Rangka Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Program Magister Teknik Sipil

Oleh :

**SUBRANTO
L.4A.004.061**

**PROGRAM PASCA SARJANA
UNIVERSITAS DIPONEGORO
SEMARANG
2007**

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN PENGESAHAN	I
ABSTRAKSI	II
HALAMAN PERUNTUKAN	III
KATA PENGANTAR	IV
DAFTAR ISI	V
DAFTAR TABEL	VI
DAFTAR GAMBAR	VII
DAFTAR LAMBANG DAN NOTASI	VIII
DAFTAR LAMPIRAN	IX
BAB I PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang Masalah	I-1
1.2. Rumusan Masalah	I-2
1.3. Tujuan Penelitian dan Manfaat	I-3
1.4. Batasan Masalah	I-4
1.5. Sistematika Penulisan	I-4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1. Pendahuluan	II-1
2.2. Model <i>Smearred Crack</i>	II-2
2.3. Model <i>Discrete Crack</i>	II-3
2.4. <i>Bond Slip</i>	II-4
2.5. <i>Tension Stiffening Effect</i>	II-6
2.6. Beton	II-7
2.6.1. Hubungan konstitutif tegangan-regangan	II-8
2.6.2. Model material beton	II-11
2.6.3. Perilaku beton retak	II-11
2.6.4. Matrik kekakuan elemen beton	II-15
2.6.5. Tegangan-tegangan utama	II-16
2.6.6. Pemodelan elemen beton	II-17

2.6.7. Tegangan titik nodal	II-20
2.7. Tulangan Baja	II-21
2.7.1. Hubungan konstitutif tegangan-regangan	II-22
2.7.2. Pemodelan elemen tulangan	II-24
BAB III METODOLOGI DAN PEMROGRAMAN	
3.1. Pendahuluan	III-1
3.2. Pemodelan Struktur Beton Bertulang	III-2
3.3. Algoritma Program	III-2
3.4. Penyelesaian Nonlinieritas	III-7
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	
4.1. Pendahuluan	IV-1
4.2. Balok <i>Under Reinforced</i> (J)4	IV-1
4.3. Balok Over Reinforced (OA1)	IV-6
4.4. Balok Tinggi	IV-11
4.5. Balok Dominasi Geser (A4)	IV-16
4.6. Balok Lentur Murni	IV-21
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	
5.1. Kesimpulan	V-1
5.2. Saran	V-2
DAFTAR PUSTAKA	X
LAMPIRAN	XI

DAFTAR TABEL

No.	Judul	Halaman
2.1.	Koordinat titik nodal pada sistem sumbu (ξ, η) dan (ξ', η')	II-21
2.2.	Koordinat <i>Gauss point</i> pada sistem sumbu (ξ, η) dan (ξ', η')	II-21
4.1.	Inkrementasi beban balok J4	IV-3
4.2.	Beban dan perpindahan balok J4	IV-5
4.3.	Inkrementasi beban balok <i>Over Reinforced</i> OA1	IV-8
4.4.	Beban dan perpindahan balok OA1	IV-10
4.5.	Inkrementasi beban balok tinggi	IV-14
4.6.	Beban dan perpindahan balok tinggi	IV-15
4.7.	Inkrementasi beban balok lentur murni	IV-22

DAFTAR GAMBAR

No.	Judul	Halaman
2.1.	<i>Smeared crack</i>	II-2
2.2.	<i>Discrete crack</i>	II-2
2.3.	Pengaruh <i>slip</i> antara beton dan tulangan terhadap regangan tulangan	II-6
2.4.	Respon tegangan-regangan <i>reinforcing bar fiber</i> dengan <i>bond</i> yang berbeda akibat beban monotonik, Monti et. Al (2000)	II-6
2.5.	Respon struktur beton bertulang	II-8
2.6.	Hubungan konstitutif tegangan-regangan beton pada arah utama tekan, Vecchio (1989)	II-9
2.7.	Hubungan tegangan-regangan beton pada arah utama tarik, Vecchio (1989)	II-10
2.8.	Pengaruh retak pada balok beton bertulang, Park dan Paulay (1973)	II-13
2.9.	Lingkaran Mohr untuk dua dimensi, Vecchio (1989)	II-17
2.10.	Elemen isoparametrik <i>quadrilateral</i> 8 titik nodal	II-18
2.11.	Ekstrapolasi tegangan dari <i>Gauss point</i> ke titik nodal	II-19
2.12.	Idealisasi hubungan tegangan-regangan baja tulangan, Park dan Paulay (1975)	II-23
2.13.	Idealisasi hubungan tegangan-regangan tulangan baja	II-24
2.14.	Model tulangan <i>distributed</i>	II-25
2.15.	Model tulangan <i>discrete</i>	II-27
2.16.	Model tulangan <i>embedded</i>	II-27
3.1.	Pemodelan struktur beton bertulang	III-2
3.2.	Algoritma program <i>finite element</i> nonlinier	III-5
3.3.	Metode Newton Rapshon	III-7
4.1.	Struktur balok J4	IV-2
4.2.	Respon beban dan perpindahan di tengah bentang balok J4	IV-4
4.3.	Pola retak balok Under Reinforced (J4) saat terdeformasi	IV-6
4.4.	Struktur balok OA1	IV-7
4.5.	Diskritisasi balok OA1 (42 elemen)	IV-7
4.6.	Respon beban dan perpindahan balok OA1	IV-9
4.7.	Pola retak balok OA1 (42 elemen) saat terdeformasi	IV-11

4.8.	Balok tinggi, Leonhardt dan Walther (1966)	IV-12
4.9.	Pemodelan balok tinggi (56 elemen)	IV-12
4.10.	Hubungan beban-perpindahan balok tinggi	IV-14
4.11.	Pola retak balok tinggi (3x3 titik <i>Gauss</i>)	IV-15
4.12.	Struktur balok A4	IV-17
4.13.	Hubungan beban-perpindahan balok A4	IV-19
4.14.	Pola retak balok A4 saat terdeformasi	IV-20
4.15.	Penampang dan diskritisasi balok lentur murni 40 elemen	IV-21
4.16.	Pola retak balok lentur murni saat terdeformasi	IV-22
4.17.	Struktur balok lentur geser	IV-23
4.18.	Pola retak balok lentur geser	IV-23

DAFTAR LAMPIRAN

No.	Judul	Halaman
1.	Tampilan Program	i
2.	Listing program	ii

DAFTAR LAMBANG DAN NOTASI

Lambang dan Notasi	Keterangan
A_s	Luas tulangan
$[B]$	Matrik hubungan regangan-perpindahan
$[D]$	Matrik kekakuan material
d	Tinggi efektif balok
$d\varepsilon_{11}$	Pertambahan regangan tarik
$d\varepsilon_{22}$	Pertambahan regangan tekan
$d\gamma_{12}$	Pertambahan regangan geser
E_c	Elastisitas beton
E_s	Elastisitas baja
f_c'	Kuat tekan beton
f_{c1}	Tegangan utama tarik beton
f_{c2}	Tegangan utama tekan beton
$f_{c2\ max}$	Kuat tekan beton pada awal retak
f_{cr}	Tegangan retak beton
f_r	Modulus <i>rupture</i>
f_t	Kuat tarik beton
f_y	Tegangan leleh baja
$[J]$	Matrik Jacobian
$[J]^{-1}$	Invers matrik Jacobian
$[k_c]$	Matrik kekakuan elemen beton
$[K_{str}]$	Matrik kekakuan struktur
l	Panjang tulangan
N	Fungsi bentuk
s	Slip
t	Tebal elemen
u	Perpindahan arah sumbu x
v	Perpindahan arah sumbu y
$[T]$	Matrik transformasi elemen
β	Koefisien geser

ε_0	Regangan pada saat beban ultimit
ε_c	Regangan beton
ε_{cr}	Regangan retak beton
ε_s	Regangan baja
ε_{c1}	Regangan utama tarik beton
ε_{c2}	Regangan utama tekan beton
$\{ \varepsilon \}$	Vektor regangan
γ_{xy}	Regangan geser
$\{ \sigma \}$	Vektor tegangan
σ_1	Tegangan utama tarik
σ_2	Tegangan utama tekan
σ_x	Tegangan normal arah sumbu x
σ_y	Tegangan normal arah sumbu y
τ_{xy}	Tegangan geser
ρ	Rasio tulangan terhadap luas penampang beton
θ	Sudut regangan dengan sumbu x
ν	Rasio Poisson

ABSTRAKSI

Konstruksi beton yang berkembang dengan pesat diiringi oleh perkembangan teknologi komputer yang semakin canggih mendorong banyaknya studi numerik yang dilakukan untuk menyelidiki perilaku material beton. Metode elemen hingga sering digunakan untuk menganalisa suatu struktur beton bertulang dengan memasukkan beberapa parameter beton bertulang.

Respon beban-perpindahan struktur beton bertulang pada beban yang kecil cenderung linier kemudian menjadi nonlinier ketika memasuki daerah retak dan akhirnya mencapai kegagalan dibawah beban runtuh. Pemodelan retak merupakan salah satu faktor penting dalam menganalisa struktur beton bertulang, terdapat dua jenis pemodelan retak yaitu *smeared* dan *discrete crack*. Model *smeared crack* menggambarkan material beton setelah retak sebagai sebagai suatu kontinum dengan merubah perilakunya dari isotropik menjadi orthotropik sedangkan *discrete crack* memodelkan retak dengan memisahkan titik nodal elemen yang berseberangan ketika retak terjadi.

Studi numerik ini menggunakan pemodelan retak dan tulangan terdistribusi merata, dengan pemodelan seperti ini analisis menjadi lebih mudah dalam mencapai tujuannya yaitu menyelidiki respon beban perpindahan serta pengaruh koefisien geser terhadap respon beton bertulang. Pemodelan elemen hingga menggunakan elemen delapan titik nodal (*quadrilateral*) dan sembilan titik *Gauss*. Hasil analisis yang diperoleh kemudian dibandingkan dengan hasil uji eksperimental maupun uji numerik yang dilakukan oleh peneliti sebelumnya. Beberapa kasus yang diuji mendapatkan hasil yang cukup baik terhadap respon beban perpindahan beton bertulang, terutama pada kasus yang didominasi lentur *under reinforced* atau pada kasus lentur yang memiliki tulangan *over reinforced*. Selain itu juga diperoleh arah perambatan retak yang terbentuk dimana arah retak dijaga tetap tegak lurus arah tegangan tarik.

Kata kunci : *smeared crack*, arah retak, koefisien geser, dan respon beban-perpindahan.

ABSTRAKSI

Studi numerik elemen hingga telah banyak dilakukan untuk mengetahui perilaku struktur beton bertulang. Retak pada beton merupakan permasalahan yang paling mendasar pada struktur beton bertulang. Pengembangan metode elemen hingga dengan memasukkan retak dan koefisien geser merupakan salah satu cara untuk mengetahui perilaku struktur beton bertulang melalui pendekatan simulasi numerik.

Respon beban-perpindahan struktur beton bertulang pada beban yang kecil cenderung linier kemudian menjadi nonlinier ketika memasuki daerah retak dan akhirnya mencapai kegagalan dibawah beban runtuh. Pemodelan retak merupakan salah satu faktor penting dalam menganalisa struktur beton bertulang, terdapat dua jenis pemodelan retak yaitu *smeared* dan *discrete crack*. Model *smeared crack* menggambarkan material beton setelah retak sebagai sebagai suatu kontinum dengan merubah perilakunya dari isotropik menjadi orthotropik sedangkan *discrete crack* memodelkan retak dengan memisahkan titik nodal elemen yang berseberangan ketika retak terjadi.

Studi numerik ini menggunakan pemodelan retak dan tulangan terdistribusi merata, dengan pemodelan seperti ini analisis menjadi lebih mudah dalam mencapai tujuannya yaitu menyelidiki respon beban perpindahan serta pengaruh koefisien geser terhadap respon beton bertulang. Pemodelan elemen hingga menggunakan elemen delapan titik nodal (*quadrilateral*) dan sembilan titik *Gauss*. Hasil analisis yang diperoleh kemudian dibandingkan dengan hasil uji eksperimental maupun uji numerik yang dilakukan oleh peneliti sebelumnya. Beberapa kasus yang diuji mendapatkan hasil yang cukup baik terhadap respon beban perpindahan beton bertulang, terutama pada kasus dominasi lentur *under* dan *over reinforced*. Selain itu juga diperoleh arah perambatan retak yang terbentuk dimana arah retak tegak lurus arah tegangan tarik.

Kata kunci : *smeared crack*, arah retak, koefisien geser, dan respon beban-perpindahan.

ABSTRACT

Many Numerical studies on finite element method have been carried out to find out the behaviour of reinforced concrete structure. Concrete cracking is fundamental problem of reinforced concrete structure. Development of finite element method by involving cracks and shear coefficient is one method to find out the behavior of reinforced concrete structure through numerical simulation.

Load-deformation response of reinforced concrete structure at initial load tends to be linear, then become nonlinear when entering crack area and finally reach the failure below the collapse load. The crack model is one of the important factor in analysing reinforced concrete structure. There are two crack models that are smeared crack and discrete crack. The smeared crack model illustrates the concrete material after crack as continuum with a changed the concrete behavior from isotropic to orthotropic characters, while in discrete crack a crack is modeled as a node separation on the side of adjacent element when principle tensile stresses of node have reached the tensile strength of concrete.

This numerical study used the smeared crack and smeared element approach. By this model, the analyses becomes easier in getting the purpose, that are investigating load-deformation response and also the influence of shear coefficient to reinforced concrete response. The finite element model applied the eight element nodes (quadrilateral) and nine Gauss points. Analytical result obtained then compared to result of experimental tests and also numerical tests done by previous researchers. Some cases produced good enough results to load-deformation response of reinforced concrete, especially in the case of dominated by flexure under and over reinforced. Also obtained crack direction where the crack direction perpendicular to the tension stresses.

Keyword : smeared crack, crack direction, shear coefficient, and load-deformation response

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Penggunaan material beton sebagai material bangunan sangat dominan dibanding material lain dalam industri konstruksi. Keunggulan material beton yang mempunyai kekuatan dan kekakuan tinggi, murah, mudah dibentuk dan tanpa memerlukan biaya perawatan membuat pemakaian material ini sangat luas di dalam industri konstruksi. Selain memiliki keunggulan-keunggulan seperti diatas material ini mempunyai beberapa kekurangan antara lain lemah dalam menahan tarik, oleh karenanya penggunaan material beton pada struktur sering disertai dengan penggunaan material lain yang mempunyai kuat tarik tinggi. Dalam praktek beton sering dikomposisikan dengan material baja tulangan sebagai upaya untuk meningkatkan kemampuan struktur beton dalam menahan tarik.

Beton yang lemah terhadap tarik menjadi menjadi penyebab utama terjadinya retak pada struktur beton bertulang dalam kondisi beban kerja. Retak yang terjadi pada struktur beton bertulang tentu akan mempengaruhi perilaku struktur tersebut. Kondisi demikian mengakibatkan perilaku struktur beton bertulang lebih kompleks dibanding struktur lain. Untuk mendapatkan data dan informasi yang benar tentang perilaku struktur beton bertulang perlu dilakukan suatu kajian secara mendalam.

Pemahaman tentang perilaku beban-perpindahan struktur beton bertulang pada umumnya diperoleh dari pengujian eksperimental di laboratorium. Uji eksperimental ini sangat penting untuk mendapatkan gambaran mengenai respon struktur berdasarkan keadaan nyata. Untuk mendapatkan data pengujian eksperimental secara detail harus melibatkan banyak parameter pengujian yang mempunyai konsekuensi pada besarnya jumlah benda uji. Kendati demikian belum tentu semua informasi dapat diperoleh melalui pengujian eksperimental karena adanya keterbatasan kemampuan alat dan metode pengujian.

Seiring dengan perkembangan teknologi komputer yang sangat pesat, studi numerik telah banyak dikembangkan oleh para peneliti sebagai salah satu cara untuk melengkapi informasi yang tidak dapat diperoleh dari studi ekperimental. Salah satu pendekatan yang sering

digunakan dalam studi numerik adalah metode elemen hingga (*finite element method*), dimana struktur kontinum ditinjau sebagai rangkaian elemen-elemen kecil berhingga yang dihubungkan satu sama lain melalui titik-titik nodal yang terdapat pada tepi elemen. Setiap elemen mempunyai beberapa titik nodal yang mempunyai derajat kebebasan (*degree of freedom*).

Perilaku beton yang non-linier elastis menjadi persoalan tersendiri dalam pemodelan *finite element analysis*. Non-linieritas material pada struktur beton sangat dipengaruhi oleh terbentuknya retak karena setelah retak perilaku elemen beton berubah dari isotropik menjadi orthotropik, di pihak lain perilaku material tulangan baja pada beton retak bersifat tetap. Pengaruh hilangnya lekatan antara tulangan dan beton menyebabkan pula perilaku struktur beton bertulang menjadi tidak linier. Perilaku-perilaku tersebut memerlukan strategi khusus dalam mengevaluasi kekakuan material karena meskipun dalam kondisi elastis kekakuan material beton tidak menunjukkan sifat linier. Dengan demikian pada setiap inkrementasi beban kekakuan material selalu diperbaiki, oleh karena itu pada tesis ini akan dikembangkan suatu model *finite element* yang dapat merepresentasikan perilaku struktur beton bertulang dengan memasukkan sifat non-linieritas material dan dapat mensimulasikan pola serta propagasi retak pada setiap inkrementasi beban.

1.2. Rumusan Masalah

Dari penjelasan latar belakang masalah dapat dibuat permasalahan yang terdapat pada analisa struktur beton dengan *finite element*, yaitu non-linieritas beton bertulang disebabkan antara lain oleh terbentuknya retak, dimana setelah retak terbentuk kekakuan struktur akan mengalami degradasi yang disebabkan perubahan sifat material dari isotropik menjadi orthotropik. Hal ini secara langsung mempengaruhi kekakuan material yang kemudian mempengaruhi matrik kekakuan elemen dan akhirnya mempengaruhi pula kekakuan struktur secara keseluruhan.

1.3. Tujuan Penelitian dan Manfaat

Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan model analitis *finite element* yang dapat merepresentasikan perilaku non-linieritas material dan dapat mensimulasikan pola serta

propagasi retak pada setiap inkrementasi beban. Hasil dari model analitis *finite element* ini diharapkan dapat menjadi sarana untuk mengetahui perilaku struktur beton secara lebih detail.

1.4. Batasan Masalah

Untuk penyelesaian masalah dalam penelitian ini dilakukan pendekatan dan asumsi-asumsi sebagai berikut :

- 1) Struktur beton bertulang ditinjau dalam sistem dua dimensi *plane stress*.
- 2) Pembebanan yang dikenakan pada struktur terbatas pada beban monotonik.
- 3) Terbentuknya retak berdasarkan pada kriteria kuat tarik beton (*strength criterion*).
- 4) Pemodelan retak dan tulangan menggunakan pendekatan *smeared*.
- 5) Ikatan antara tulangan dan beton diasumsikan lekat sempurna (*full bonded*).
- 6) Berat sendiri balok diabaikan.
- 7) Sumbu atau arah tegangan dan regangan setelah retak dianggap berhimpit.
- 8) Koefisien geser β diasumsikan konstan pada beton yang telah retak.

1.5. Sistematika Penulisan

Penulisan tesis ini disajikan dalam 5 bab yang meliputi :

Bab I. Pendahuluan

Bab ini menjelaskan latar belakang, perumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah serta sistematika penulisan.

Bab II. Tinjauan Pustaka

Hasil penelitian sebelumnya yang berkaitan dengan penelitian ini seperti, pemodelan retak, pemodelan material beton, pemodelan tulangan dan pemodelan struktur beton bertulang, pembentukan matrik kekakuan material, pembentukan matrik kekakuan elemen dan superposisi matrik kekakuan struktur dibahas sebagai tinjauan pustaka.

Bab III. Metodologi dan Pemrograman

Bab ini berisi tentang algoritma atau bagan alir program serta penyelesaian non linieritas pada *finite element*.

Bab IV. Hasil dan Pembahasan

Data hasil penelitian numerik dan eksperimental yang telah dilakukan sebelumnya digunakan sebagai pembandingan terhadap akurasi dan kestabilan model yang diusulkan.

Bab V. Kesimpulan dan Saran

Hasil dari verifikasi dibahas secara ringkas dan saran untuk penelitian-penelitian selanjutnya menjadi pembahasan dalam bab ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Pendahuluan

Beton bertulang adalah sebuah material komposit yang terdiri dari dua bahan dasar yaitu beton dan baja tulangan yang mempunyai karakteristik sangat berbeda. Beton seperti diketahui sangat baik dalam menahan desak atau tekan tetapi sangat lemah dalam menahan tarik, sementara baja sama kuatnya dalam menahan tarik atau tekan akan tetapi karena bentuk profil baja biasanya mempunyai inersia lebih rendah dari beton mengakibatkan material ini mudah mengalami tekuk (*buckling*) dalam kondisi tekan. Hal inilah yang mendasari pemakaian material komposit beton bertulang.

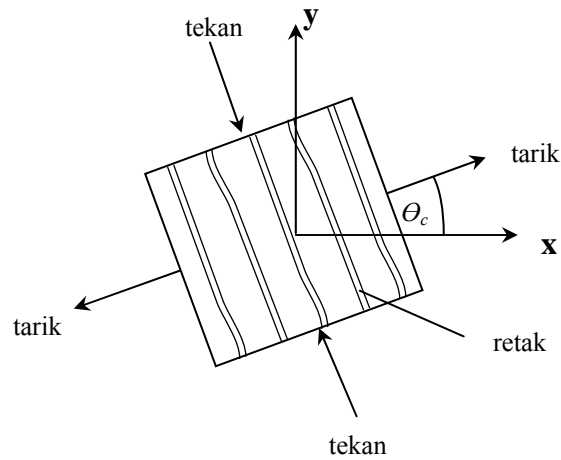
Beton yang mengalami tegangan tarik lebih besar dari tegangan retak akan mengalami retak, kelemahan ini akan sangat mempengaruhi respon struktur beton bertulang dan menjadi faktor utama dari perilaku nonlinier beton. Selain faktor retak nonlinieritas beton bertulang juga dipengaruhi oleh *bond slip* antara tulangan dengan beton, plastisitas tulangan, daerah tekan beton, dan pengaruh waktu seperti rangkai, susut, suhu pengeringan, serta *load history*. Untuk mendapatkan hasil analisa yang dapat mewakili perilaku struktur beton bertulang secara baik pengaruh retak pada beton tidak dapat diabaikan. Mekanisme lekatan antara tulangan dan beton menjadi permasalahan lain yang perlu ditinjau, karena aksi komposit bekerja berdasarkan gaya lekatan diantara keduanya.

Peneliti-peneliti sebelumnya membagi pemodelan retak dalam metode elemen hingga menjadi tiga bagian, yaitu:

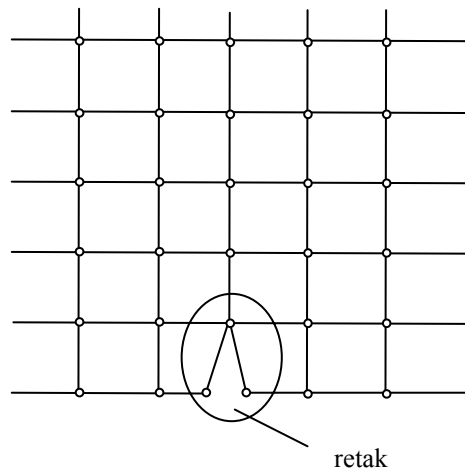
- 1) *Smeared-cracking model*
- 2) *Discrete-cracking model*
- 3) *Fracture-mechanic model*

Pemilihan model-model diatas tergantung pada tujuan yang hendak dicapai. Model *smeared crack* menjadi alternatif pilihan ketika perilaku respon beban-perpindahan menjadi sasaran utama tanpa memperhatikan pola retak (*crack pattern*) dan *local stress* yang terjadi pada struktur secara keseluruhan. Jika perilaku detail lokal menjadi fokus utama maka pendekatan

model *discrete crack* menjadi lebih tepat. Pada masalah khusus retak pendekatan model *fracture mechanic* biasanya digunakan.



Gambar 2.1. *Smeared crack*



Gambar 2.2. *Discrete crack*

2.2. Model *Smeared Crack*

Model ini pertama kali diusulkan oleh Rashid (1968), model ini menganggap retak yang terbentuk terdistribusi secara merata pada seluruh elemen dengan arah tegak lurus tegangan utama tarik dan elemen beton yang telah mengalami retak tetap dianggap sebagai kontinum. Sebelum retak terjadi (*uncracked*) beton dianggap sebagai material isotropik dan setelah retak (*cracked*) beton ditinjau sebagai material orthotropik.

Kotsovos (1984) melakukan studi analisis *finite element* untuk mengetahui perilaku balok beton bertulang *under reinforcement* dengan pendekatan *smeared crack*. Kotsovos menggunakan elemen isoparametrik delapan titik nodal dua dimensi untuk memodelkan beton dan elemen batang menggunakan tiga titik nodal untuk memodelkan tulangan. Retak akan terbentuk jika sedikitnya salah satu dari tegangan utama beton telah melampaui tegangan retak beton. Kotsovos menganggap hubungan antara beton dan tulangan lekat sempurna (*perfect bond*) artinya tidak terjadi *slip* diantara kedua material baja dan beton. Pola retak struktur beton digambarkan berdasarkan arah tegak lurus tegangan utama tarik yang terjadi pada titik *Gauss* pada setiap elemen yang telah retak.

Vecchio (1989) mengatakan bahwa prosedur elastik linier dapat dimodifikasi menjadi prosedur nonlinier untuk menganalisa struktur beton bertulang. Hal tersebut didasari pada formulasi kekakuan sekan (*secant stiffness formulation*). Dalam analisisnya Vecchio menggunakan pendekatan *smeared crack* untuk memodelkan beton yang telah retak. Keseimbangan, kompatibilitas dan hubungan tegangan-regangan diformulasikan dalam nilai rata-rata dari tegangan dan regangan, anggapan yang sama dilakukan juga oleh Vecchio dan Collins (1986). Vecchio meninjau tulangan pada arah *longitudinal* dan *transversal* sebagai *smeared element*, dimana kekakuan elemen tulangan dimasukkan ke dalam matrik kekakuan elemen beton.

Kwak dan Filippou (1990) melakukan studi analisis terhadap struktur beton bertulang dengan pembebanan monotonik. Seperti halnya Kotsovos pemodelan elemen beton menggunakan delapan titik nodal (*quadrilateral*) dan elemen tulangan digunakan dua titik nodal serta retak beton dimodelkan sebagai *smeared crack*, tetapi Kwak dan Filippou memodelkan perilaku *bond slip* antara beton dan tulangan dengan menggunakan *linkage element* seperti yang digunakan oleh Ngo dan Scordellis (1967).

2.3. Model Discrete Crack

Discrete crack memodelkan retak dengan cara memisahkan titik-titik nodal pada elemen-elemen yang berseberangan ketika tegangan utama tarik pada titik nodal yang ditinjau melampaui tegangan retak beton. Model ini diakui dapat menggambarkan secara fisik dengan baik, akan tetapi model ini tidak bisa menggambarkan arah retak secara benar, karena titik

nodal yang dipisahkan tersebut belum tentu mempunyai arah yang sama dengan arah tegak lurus tegangan utama tarik. Kendala yang terjadi dalam pemodelan ini adalah adanya perubahan topologi struktur ketika retak beton telah terjadi, dimana titik nodal harus ditata ulang dan *loading history* juga harus dimulai dari awal pembebanan.

Model ini pertama kali diusulkan oleh Ngo dan Scordellis (1967), kemudian diikuti oleh beberapa peneliti lain diantaranya Nilson (1968), Grootenboer (1979), Yao dan Murray (1995), Mohammed Arafa dan Gerhard Mehlhorn (1998). Beberapa peneliti setelah itu mencoba menggabungkan model *smeared* dan *discrete crack* dalam menganalisa beton bertulang diantaranya : adalah Einsfeld, Martha dan Bittencourt (2000) serta Nuroji (2004).

2.4. Bond Slip

Pada struktur komposit beton bertulang penggunaan tulangan baja dimaksudkan menahan gaya tarik yang diterima struktur komposit. Tegangan tarik yang bekerja pada tulangan kemudian disalurkan ke beton disekelilingnya melalui lekatan (*bond*) antara beton dan tulangan. Peranan tegangan lekatan sangat penting karena tanpa adanya lekatan maka aksi komposit beton dan tulangan tidak akan terjadi. Perbedaan perilaku yang sangat tajam dimana modulus elastisitas dan kapasitas regangan beton sangat jauh dibawah baja, mengakibatkan beton tidak mampu mengikuti deformasi tulangan. Ketika tegangan tarik beton mencapai tegangan retak maka akan timbul retak dan diikuti *slip* antara beton dan tulangan.

Edward G. Nawy (1985), mengatakan kekuatan lekatan merupakan hasil dari beberapa parameter seperti adhesi antara permukaan baja dan beton, faktor-faktor lain yang mempengaruhi adalah : *gripping*, Friksi dan *interlocking*, kuat tarik beton, panjang penjangkaran, diameter, bentuk dan jarak tulangan.

Monti dan Spacone (2000) seperti yang dikutip Nuroji (2004) membuat komparasi respon hubungan tegangan-regangan dari tulangan konvensional yang dibandingkan dengan tulangan yang diberi pengaruh *bond-slip* sepanjang penjangkaran. Pengujian yang dilakukan adalah *pull-out test* dengan panjang penjangkaran 20 kali diameter tulangan dan dikenakan beban monotonik. Pada pengujian tersebut dimasukkan tiga kondisi *bond slip* yang berbeda.

Full bond, kondisi ini menyatakan tulangan konvensional dimana *slip* tidak terjadi sama sekali, sehingga regangan beton ε_c sama dengan regangan baja ε_s .

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s = \frac{\Delta l}{l} \quad (\text{II.1})$$

Normal bond, kondisi ini menggambarkan suatu tulangan yang tertanam dalam beton dengan panjang penjangkaran yang cukup. Jika struktur beton bertulang telah mengalami *split*, perpanjangan tulangan lebih kecil dibanding perpanjangan beton, sehingga regangan tulangan yang terjadi merupakan fungsi dari *slip* (s).

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta l - s}{\Delta l} \cdot \varepsilon_s^* \quad (\text{II.2})$$

dimana :

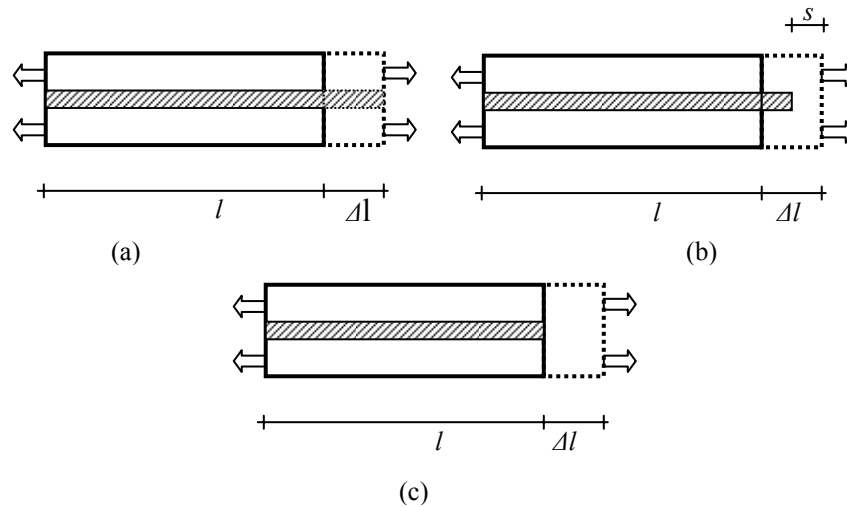
Δl : perpanjangan

s : *slip*

ε^* : regangan tulangan konvensional

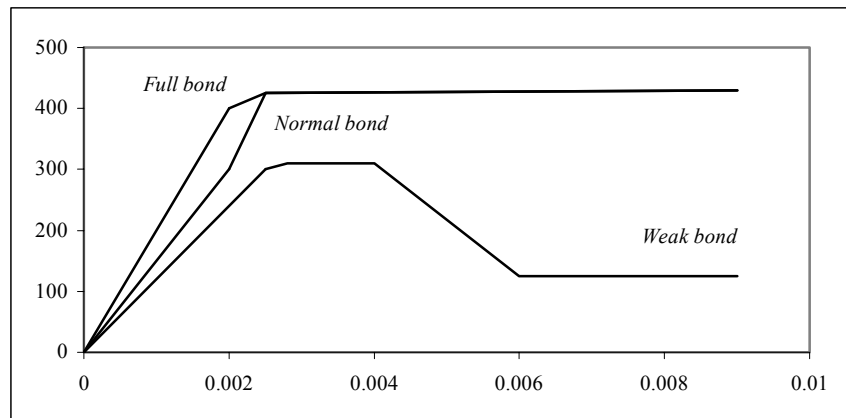
Weak bond, kondisi ini menggambarkan suatu tulangan yang tertanam dalam beton dengan panjang penjangkaran yang kurang, sehingga *bond* antara beton dan tulangan tidak mampu menahan beban pada tulangan di bagian ujung.

Hasil yang didapat pada kasus *normal bond* tegangan pasca leleh sama dengan kondisi *full bond*, sedangkan untuk kondisi *weak bond* keruntuhan *bond* secara drastis mengubah perilaku tegangan regangan tulangan ketika masih dalam keadaan elastis.



Gambar 2.3. Pengaruh *slip* antara beton dan tulangan terhadap regangan tulangan

- (a) kondisi lekatan sempurna (*full bond*)
- (b) kondisi lekatan tidak sempurna
- (c) kondisi tidak ada lekatan sama sekali



Gambar 2.4. Respon tegangan-regangan *reinforcing bar fiber* dengan *bond* yang berbeda akibat beban monotonik, Monti et. Al (2000)

2.4. *Tension Stiffening Effect*

Tegangan tarik yang terjadi tepat diposisi retak seluruhnya akan diterima oleh tulangan, tetapi menurut Park dan Paulay (1975) beton diantara dua retak masih sanggup menerima tegangan tarik sehingga tegangan tulangan diantara dua retak tersebut menjadi lebih kecil dibanding tepat diposisi retak, fenomena ini dinamakan *tension stiffening effect*. Besar dan distribusi tegangan lekatan diantara retak menentukan distribusi tegangan tarik pada beton dan tulangan diantara retak.

Sebelum retak terbentuk perbandingan tegangan pada beton dan tulangan selalu konstan, hal ini menunjukkan bahwa sebelum elemen beton bertulang mengalami retak deformasi beton dan tulangan sama besar dengan kata lain interaksi antara kedua material tersebut adalah sempurna. Setelah retak terbentuk peningkatan deformasi struktur lebih besar dan tidak sebanding dengan peningkatan tegangan meskipun perilaku tulangan masih elastik linier, hal ini menunjukkan adanya penurunan kekakuan material beton dalam menerima tegangan tarik.

Dari pembahasan tentang *bond-slip* dan *tension stiffening* di atas dapat disimpulkan bahwa :

- a) Diantara dua retak yang berdekatan beton masih memberikan sumbangan tarik.
- b) Tegangan tulangan di lokasi retak meningkat tajam karena seluruh gaya tarik dipikul oleh tulangan.
- c) Pengaruh *bond slip* antara beton dan tulangan dapat mereduksi kekakuan efektif tulangan.

Pemodelan retak dalam tesis ini mengacu pada penelitian yang dilakukan oleh Rashid (1968), Kwak dan Filippou (1990), serta Kotsoyost (1984), dimana retak digambarkan terdistribusi secara merata dalam elemen beton dengan kata lain digunakan pemodelan *smearred crack*. Pengaruh lekatan dimasukkan dengan menganggap lekatan sempurna (*Full bond*), dimana tidak terjadi *slip* sama sekali antara beton dan tulangan.

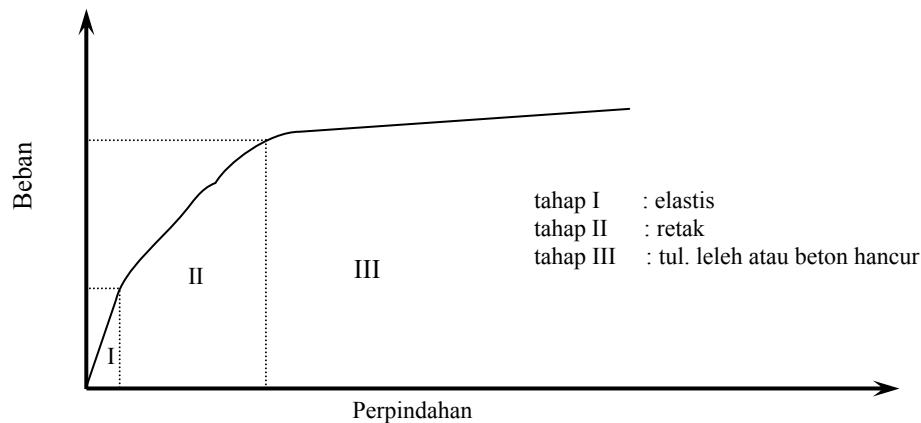
2.5. Beton

Beton terbuat dari campuran beberapa material alam seperti semen, agregat halus dan agregat kasar, adanya beberapa macam material tersebut membuat sifat beton menjadi heterogen dan propertis mekaniknya menyebar lebih luas hal tersebut menjadikan perilaku beton sukar untuk didefinisikan. Namun dalam tahap analisis dan desain beton sering dianggap sebagai material homogen dalam pengertian makroskopik. Nawy, Edward G. (1986) membagi propertis material beton menjadi dua bagian yaitu jangka pendek dan jangka panjang. Kuat tekan, kuat tarik, kuat geser dan modulus elastisitas beton termasuk dalam propertis material beton dalam jangka pendek, sedang rangkai dan susut dimasukkan dalam jangka panjang.

Bentuk respon struktur beton bertulang dapat dilihat pada gambar 2.5, dimana bentuk linier terjadi pada tahap awal pembebanan sampai terbentuknya retak pertama kali, setelah terjadi

retak hubungan beban perpindahan menjadi *non linear*. Chen (1982) dan Kwak et al. (1990) membagi respon struktur beton bertulang menjadi tiga tahap, yaitu : tahap elastis (*uncrack*), perambatan retak (*crack propagation*) dan tahap dimana tulangan leleh atau terjadi kehancuran beton pada daerah tekan. Perilaku non linier setelah retak juga dipengaruhi oleh beberapa faktor seperti :

- Hubungan konstitutif tegangan-regangan beton yang memang nonlinier dan berbeda antar kondisi tarik dan tekan.
- Bond slip* antara beton dan tulangan
- Ikatan antar agregat pembentuk beton
- Dowel action* pada retak yang melintasi tulangan.
- Rangkak dan Susut



Gambar 2.5. Respon struktur beton bertulang

2.5.1. Hubungan konstitutif material beton

Perilaku hubungan tegangan-regangan beton berbeda untuk kondisi tekan dan tarik, untuk itu hubungan konstitutif tegangan-regangan dibuat secara terpisah. Hubungan tegangan-regangan pada arah utama tekan mendekati respon elastis linier sampai dengan sekitar 30 % dari kuat tekannya, setelah itu berlaku hubungan non linier sampai mencapai kuat tekan beton. Kemudian bentuk kurva akan turun sampai dengan nol, hal ini menunjukkan berkurangnya tegangan sampai beton runtuh yang ditandai oleh pecahnya beton , Kwak dan Filippou (1990).

Vecchio (1989) memformulasikan bahwa tegangan utama tekan beton f_{c2} sebagai parameter yang tidak hanya tergantung pada regangan utama tekan ε_2 saja tetapi juga merupakan fungsi dari regangan utama tarik ε_1 seperti terlihat pada gambar 2.6. Kurva pada gambar 2.6

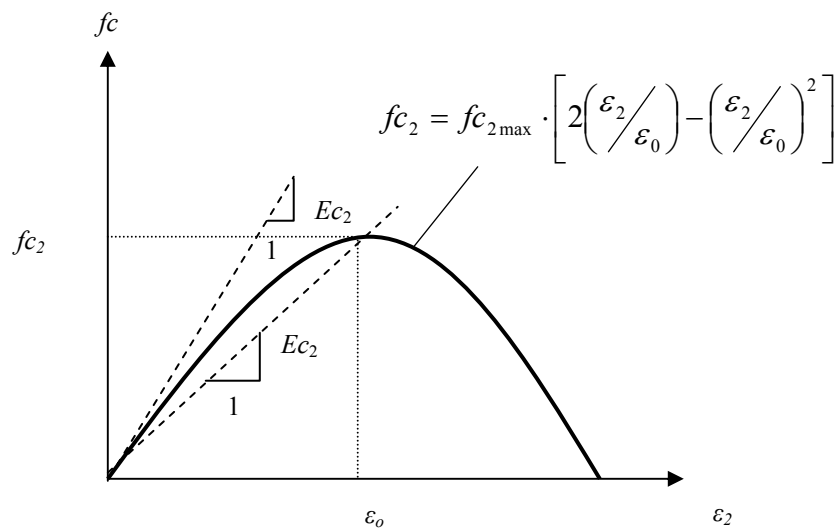
merupakan hubungan tegangan-regangan beton pada arah utama tekan dengan persamaan sebagai berikut.

$$f_{c_2} = f_{c_{2\max}} \times \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad \text{II.3}$$

ε_0 = regangan tekan beton pada saat tegangan mencapai puncak

ε_l = regangan tarik beton

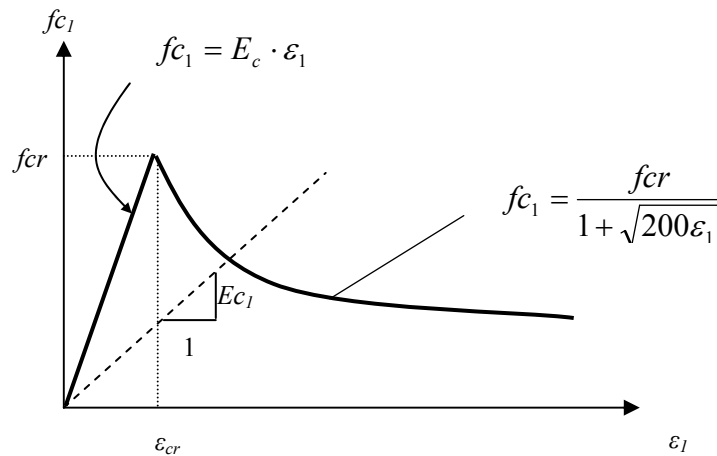
$f_{c_{2\max}}$ = kuat tekan beton pada awal retak



Gambar 2.6. Hubungan konstitutif tegangan-regangan beton pada arah utama tekan, Vecchio (1989)

$$f_{c_{2\max}} = \frac{-f'_c}{0.8 - 0.34 \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_0}} \quad \text{II.4}$$

Vecchio (1989) juga memodelkan hubungan tegangan-regangan beton pada arah utama tarik seperti nampak pada gambar 2.7.



Gambar 2.7. Hubungan tegangan-regangan beton pada arah utama tarik, Vecchio (1989)

Kurva yang terbentuk sebelum mencapai regangan retak (ϵ_{cr}) berupa hubungan linier dengan persamaan sebagai berikut.

$$f_{c1} = E_c \times \epsilon_1 \quad \text{II.5}$$

Untuk regangan yang lebih besar dari regangan retak (ϵ_{cr}).

$$f_{c1} = \frac{f_{cr}}{1 + \sqrt{200\epsilon_1}} \quad \text{II.6}$$

Dimana :

f_{cr} : tegangan retak beton

f_{c1} : tegangan utama tarik

E_c : Modulus elastisitas beton

Nawy, Edward G (1985) mengatakan bahwa kekuatan tarik beton lebih sulit diukur dibanding kuat tekannya karena masalah penjepitan (*gripping*) pada mesin. Ada sejumlah metode yang tersedia untuk menguji kekuatan tarik dan yang paling sering digunakan adalah tes pembelahan silinder. Selain itu juga digunakan *rupture* f_r' . Nawy, Park dan Paulay menentukan besarnya modulus *rupture* seperti persamaan (II.7) sementara Vecchio menentukan nilai f_{cr} sama dengan tegangan tarik f_t' .

$$f_r' = 1.09 \times f_{ct}' \leq 7.5 \times \sqrt{f_c'} \text{ (psi)} \quad \text{II.7}$$

f_{ct}' : kuat tarik beton dari uji pembelahan

f_c' : kuat tekan beton

Nilai modulus tarik beton sesuai dengan *State of the Art Report (ASCE)*

$$f_t' = 0.33 \times \sqrt{f_c'} \text{ (MPa)} \quad \text{II.8}$$

2.5.2. Model material beton

Beberapa model matematis perilaku mekanik material beton yang telah digunakan dalam analisis struktur beton bertulang. Pemodelan ini dapat digolongkan dalam beberapa grup, yaitu : *orthotropic models*, *nonlinear elasticity models*, *plastic models* ,dan *endhronic models*, (Chen 1976, ASCE 1982, Meyer dan Okamura 1985).

Orthotropic model adalah yang paling sederhana. Model ini sesuai dan mendekati pengujian eksperimental yang dikenakan beban biaksial. Model ini juga mampu mewakili perilaku *hysteristic* beton dibawah beban *cyclic* (Darwin dan Pecknold, 1997) seperti yang dikutip oleh Kwak dan Filippou (1990). Model ini sangat sesuai untuk menganalisa struktur beton bertulang seperti balok, panel dan *shell* dimana kondisi tegangan struktur tersebut didominasi oleh tegangan biaksial. Model material beton yang digunakan dalam tesis ini adalah *orthotropic* dengan alasan mempunyai bentuk yang paling sederhana tetapi dapat mewakili dengan baik kondisi tegangan biaksial.

2.5.3. Perilaku beton retak

Respon nonlinier material beton sering didominasi oleh pertumbuhan retak yang mengakibatkan keruntuhan lokal, Kwak dan Filippou (1990). Park dan Paulay (1975) mengilustrasikan bagian struktur beton bertulang yang mengalami lentur seperti terlihat pada gambar 2.8.

Pada bagian yang mengalami retak seluruh tegangan tarik diterima oleh tulangan. Bagaimanapun beton diantara retak masih mampu menahan tegangan tarik melalui mekanisme lekatan. Nilai dan distribusi tegangan lekatan antara dua retak menentukan distribusi tegangan tarik dalam beton dan tulangan diantara retak. Retak baru dapat terbentuk

diantara retak yang sudah ada, jika tegangan tarik melebihi kuat tarik beton diantara retak yang sudah ada. Jumlah dan pertambahan retak dikendalikan oleh lekatan antara tulangan dan beton, tegangan tarik beton diantara dua retak semakin menurun dengan meningkatnya momen, hal ini disebabkan karena menurunnya mekanisme transfer gaya dari tulangan ke beton akibat rusaknya ikatan (*bond*) pada interface tulangan dan beton.

Struktur seperti balok pada umumnya dapat ditinjau dalam kondisi tegangan bidang (*plane stress*). Ketika beton belum retak, material beton dapat dikategorikan sebagai material isotropik. Hubungan tegangan-regangan pada arah sumbu global untuk kondisi tegangan bidang dapat ditulis sebagai berikut.

$$\{\sigma\} = [D_{GL}]_c \cdot \{\varepsilon\} \quad \text{II.9}$$

atau

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.10}$$

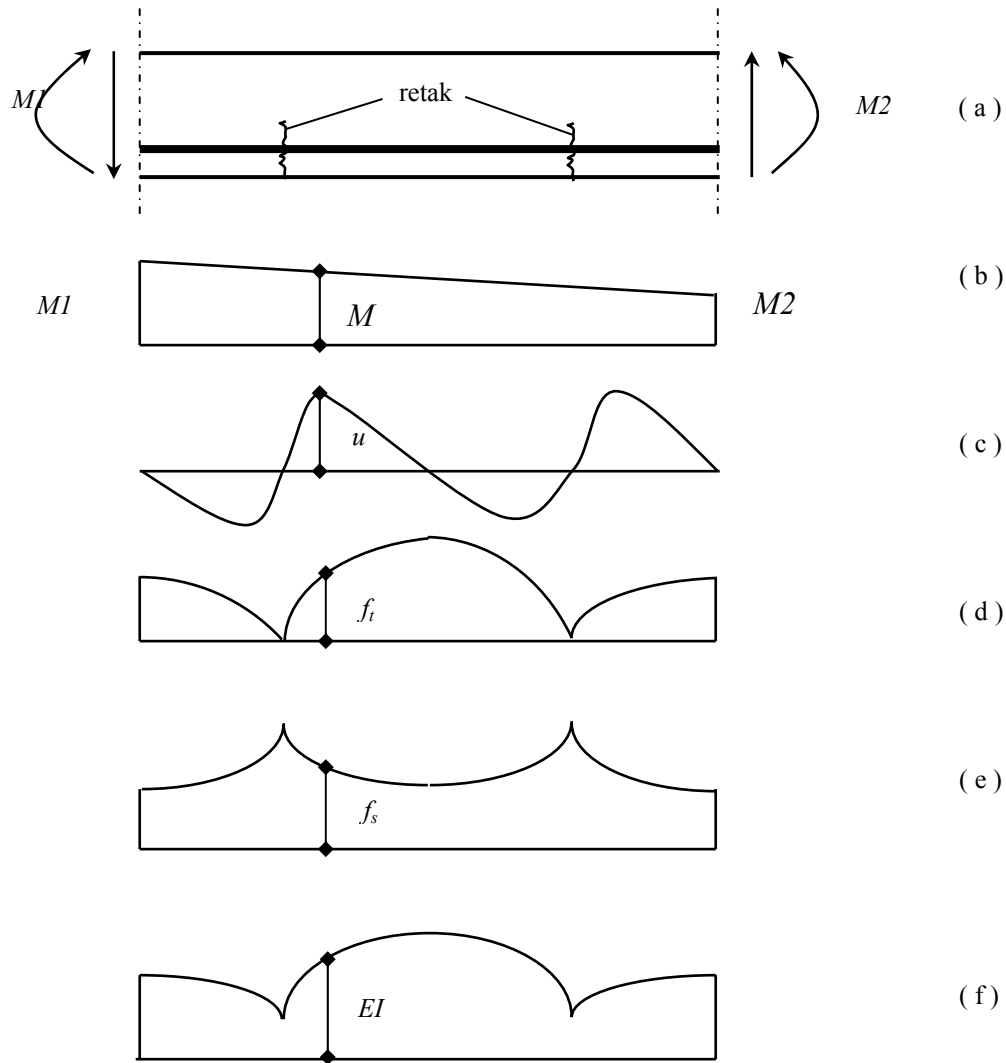
Dimana E_c adalah modulus elastisitas beton dan ν adalah *poisson's ratio* material.

Sekali tegangan normal melewati tegangan retak maka beton ditinjau sebagai material orthotropik. Hubungan konstitutif tegangan-regangan pada setiap penambahan beban dapat ditentukan berdasarkan persamaan II.11 dibawah ini.

$$\{d\sigma\} = [D_{LO}]_c \cdot \{d\varepsilon\} \quad \text{II.11}$$

atau

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \frac{E_{c1}}{E_{c2}} & \lambda \nu & 0 \\ \lambda \nu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_{c1} \cdot E_{c2}}{E_{c1} + E_{c2} + 2\nu \cdot E_{c2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{II.12}$$



Gambar 2.8. Pengaruh retak pada balok beton bertulang, Park dan Paulay (1973)

- (a) Bagian dari sebuah balok
- (b) Distribusi moment lentur
- (c) Distribusi tegangan *bond* (lekatan)
- (d) Distribusi tegangan tarik beton
- (e) Distribusi tegangan tarik tulangan
- (f) Distribusi lentur pada kondisi elastis

Dimana

$$\lambda = \frac{E_{c1}}{\frac{E_{c1}}{E_{c2}} - \nu^2}$$

E_{c1} dan E_{c2} masing-masing adalah modulus sekan tarik dan tekan dalam sumbu orthotropik, yang tegak lurus (E_{c1}) dan sejajar (E_{c2}) dengan arah retak. Pengaruh poisson ratio (ν) pada

material yang telah retak sering diabaikan, Vecchio (1989) sehingga persamaan II.12 dapat ditulis ulang menjadi.

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta.G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{II.13}$$

dimana

$$G = \frac{E_{c1} \cdot E_{c2}}{E_{c1} + E_{c2}}$$

β adalah koefisien geser, meskipun beton telah retak struktur beton masih mempunyai kekuatan geser akibat adanya aggregate interlocking sebesar $\beta.G$. Beberapa peneliti menentukan nilai $0 < \beta \leq 1.0$ untuk memberikan pengaruh geser dan sekaligus mengeliminir kesulitan numerik. Karena persamaan II.11 dan II.13 masih berdasar pada sumbu tegangan utama material, maka harus ditransformasikan terlebih dulu ke sumbu global.

$$[D_{GL}]_c = \{T\}^T [D_{LO}]_c \{T\} \quad \text{II.14}$$

Matrik transformasi dari sumbu lokal ke sumbu global dapat ditentukan melalui.

$$\{T\} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cdot \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cdot \cos \theta & 2 \sin \theta \cdot \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad \text{II.15}$$

θ : sudut antara tegangan utama tarik dengan sumbu – x

$$\theta = \frac{\tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)}{2} \quad \text{II.16}$$

Selama proses perhitungan kondisi tegangan dan regangan utama biaksial perlu dihitung kembali. Pada tahap ini tegangan-regangan utama didapat dari tegangan-regangan pada arah sistem sumbu global.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.17}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.18}$$

2.5.4. Matrik kekakuan elemen beton

Matrik kekakuan elemen beton untuk ketebalan konstan dalam sumbu global dapat diturunkan dari persamaan berikut.

$$[k_c] = t \cdot \int_A [B]^T \cdot [D_{GL}] \cdot [B] \cdot dA \quad \text{II.19}$$

dalam koordinat alami persamaan III.19 dapat ditulis sebagai berikut.

$$[k_c] = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T \cdot [D_{GL}(\xi, \eta)] \cdot [B(\xi, \eta)] \cdot [J(\xi, \eta)] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad \text{II.20}$$

Matrik *Jacobi* $[J]$ pada persamaan diatas dan inversnya ditulis sebagai berikut.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \cdot x_i^e & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \cdot y_i^e \\ \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \cdot x_i^e & \sum_{i=1}^r \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \cdot y_i^e \end{bmatrix} \quad \text{II.21}$$

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad \text{II.22}$$

Hubungan antara regangan dan displacement didapat dengan menggunakan matrik $[B]$ sebagai berikut.

$$[B]_i^e = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^e & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^e \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^e & \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^e \end{bmatrix} \quad \text{II.23}$$

$$\varepsilon^e = \sum_{i=1}^r [B]_i^e \cdot \{d\}_i^e \quad \text{II.24}$$

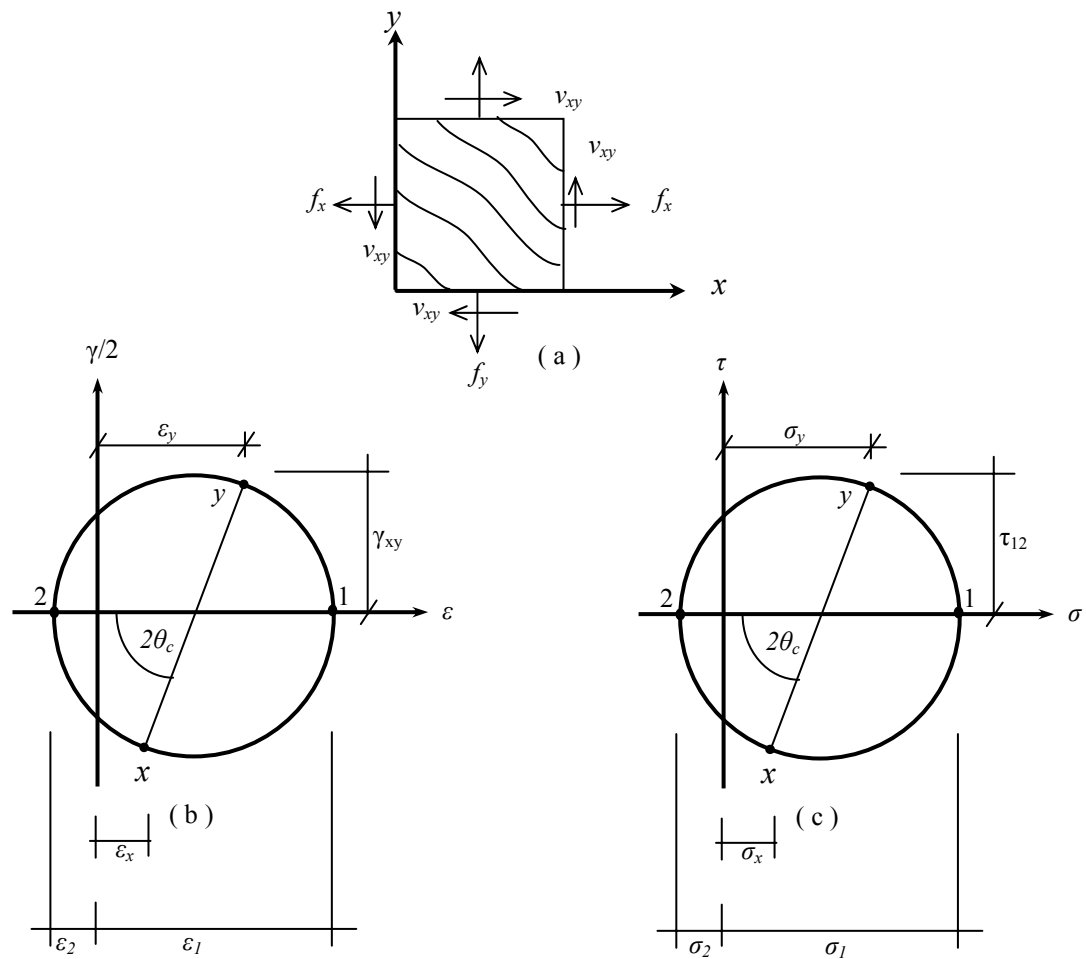
2.5.5. Tegangan-tegangan utama

Regangan elemen yang diperoleh melalui persamaan II.24 adalah regangan dalam arah sumbu global, dari regangan tersebut dapat dicari besar dan arah tegangan-regangan utama melalui lingkaran *Mohr* seperti terlihat pada gambar 2.9. Persamaan berikut mengevaluasi tegangan-tegangan utama dan arahnya.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{II.25}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{II.26}$$

$$\tan(2\theta_c) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{II.27}$$



Gambar 2.9. Lingkaran *Mohr* untuk dua dimensi ,Vecchio (1989)

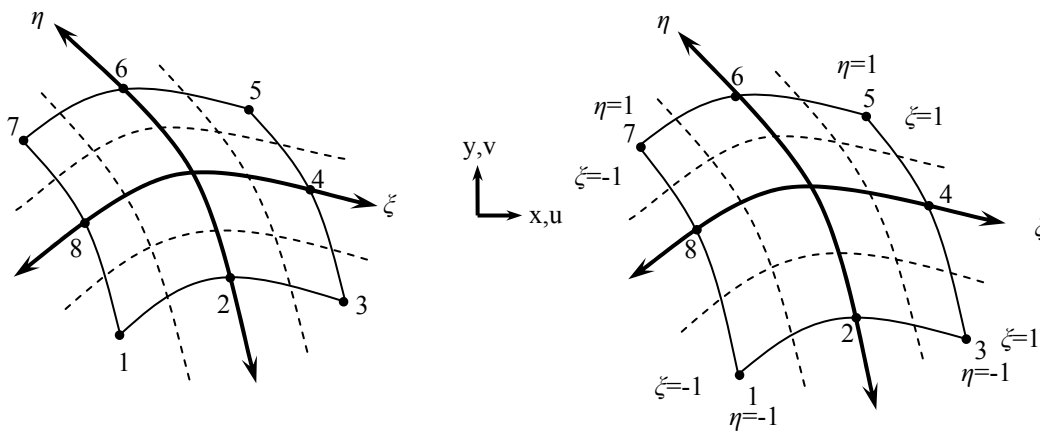
- (a) Elemen beton retak
- (b) Regangan utama bidang
- (c) Tegangan utama bidang

2.5.6. Pemodelan elemen beton

Struktur beton yang akan dianalisis menggunakan *finite element* harus dimodelkan dengan cara membagi struktur tersebut menjadi elemen-elemen yang lebih kecil, proses tersebut dinamakan diskritisasi struktur kedalam elemen. Pada umumnya struktur beton bertulang yang ditinjau dua dimensi dominan berperilaku *plane stress* atau tegangan bidang, dimana tegangan pada arah tegak lurus bidang struktur dianggap nol. Dalam finite element dikenal beberapa macam elemen bidang yang dikelompokkan berdasarkan banyaknya titik nodal pada satu elemen, yaitu : elemen segitiga, element segiempat empat nodal, elemen isoparametrik delapan nodal (*quadrilateral*) atau disebut juga elemen *serendipity* karena kedelapan nodal

terletak di tepi elemen, dan elemen isoparametrik sembilan nodal (*lagrangian*), titik nodal kesembilan terletak di dalam elemen.

Tesis ini menggunakan elemen isoparametrik *quadrilateral* dengan alasan respon struktur yang terjadi pada beton bertulang biasanya merupakan bentuk nonlinier dan elemen ini cocok untuk menggambarkan perilaku nonlinier. Isoparametrik adalah formulasi interpolasi dimana fungsi bentuk (*shape function*) dan perpindahan menggunakan penurunan persamaan yang identik.



Gambar 2.10. Elemen isoparametrik *quadrilateral* 8 titik nodal

Elemen *quadrilateral* mempunyai fungsi bentuk sebagai berikut.

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot (\xi, \eta) \cdot u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot (\xi, \eta) \cdot v_i$$

II.28

Dimana N_i merupakan fungsi bentuk, untuk elemen *quadrilateral* delapan titik nodal persamaan fungsi bentuk di atas dapat ditulis sebagai berikut.

$$N_1 = \frac{(-1 + \xi \cdot \eta + \xi \cdot \xi + \eta \cdot \eta - \xi \cdot \xi \cdot \eta - \xi \cdot \eta \cdot \eta)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1 - \eta - \xi \cdot \xi + \xi \cdot \xi \cdot \eta)}{2}$$

$$N_3 = \frac{(-1 - \xi \cdot \eta + \xi \cdot \xi + \eta \cdot \eta - \xi \cdot \xi \cdot \eta + \xi \cdot \eta \cdot \eta)}{4}$$

$$N_4 = \frac{(1 + \xi - \eta \cdot \eta - \xi \cdot \eta \cdot \eta)}{2}$$

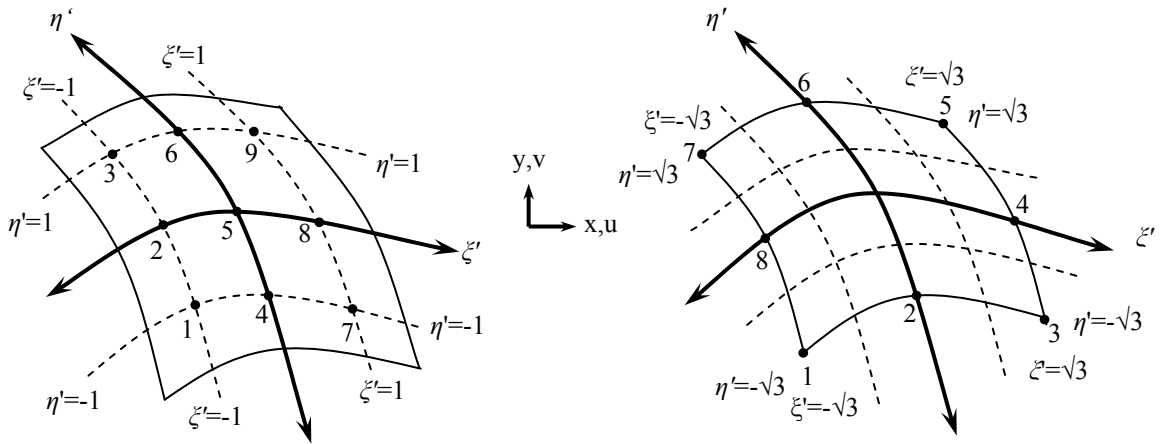
$$N_5 = \frac{(-1 + \xi \cdot \eta + \xi \cdot \xi + \eta \cdot \eta + \xi \cdot \xi \cdot \eta + \xi \cdot \eta \cdot \eta)}{4}$$

II.29

$$N_6 = \frac{(1 + \eta - \xi \cdot \xi - \xi \cdot \xi \cdot \eta)}{2}$$

$$N_7 = \frac{(-1 - \xi \cdot \eta + \xi \cdot \xi + \eta \cdot \eta + \xi \cdot \xi \cdot \eta - \xi \cdot \eta \cdot \eta)}{4}$$

$$N_8 = \frac{(1 - \xi - \eta \cdot \eta + \xi \cdot \eta \cdot \eta)}{2}$$



Gambar 2.11. Ekstrapolasi tegangan dari *Gauss point* ke titik nodal.

2.5.7. Tegangan titik nodal

Tegangan-tegangan yang diperoleh dari persamaan II.25 dan III.26 adalah tegangan yang terjadi di titik *Gauss* (*Gauss point*), untuk dapat mengetahui nilai tegangan yang terjadi pada titik nodal maka tegangan-tegangan titik *gauss* harus diekstrapolasi dengan cara mengalikan fungsi bentuk dengan tegangan σ_x , σ_y , τ_{xy} pada *Gauss point*.

$$\sigma' = \sum_{i=1}^n N_i' \cdot \sigma_i' \quad \text{II.30}$$

dimana :

σ' : tegangan pada titik nodal

σ_i' : tegangan pada *Gauss point*.

N_i' : fungsi bentuk dengan batas *Gauss point*

n : jumlah *Gauss point*

Koordinat titik nodal elemen dan *Gauss point* dalam sistem sumbu (ξ, η) dan (ξ', η') tertera pada tabel II.1 dan II.2.

Tabel II.1. Koordinat titik nodal pada sistem sumbu (ξ, η) dan (ξ', η')

Titik Nodal	ξ	η	ξ'	η'
1	-1	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
2	0	-1	0	$-\sqrt{3}$
3	1	-1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
4	1	0	$\sqrt{3}$	0
5	1	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
6	0	1	0	$\sqrt{3}$
7	-1	1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
8	-1	0	$-\sqrt{3}$	0

Tabel II.2. Koordinat *Gauss point* pada sistem sumbu (ξ, η) dan (ξ', η')

Titik Nodal	ξ	η	ξ'	η'
1	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	-1	-1
2	$1/\sqrt{3}$	0	-1	0
3	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	-1	1
4	0	$-1/\sqrt{3}$	0	-1
5	0	0	0	0
6	0	$1/\sqrt{3}$	0	1
7	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1	-1
8	$1/\sqrt{3}$	0	1	0
9	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1	1

2.6. Tulangan Baja

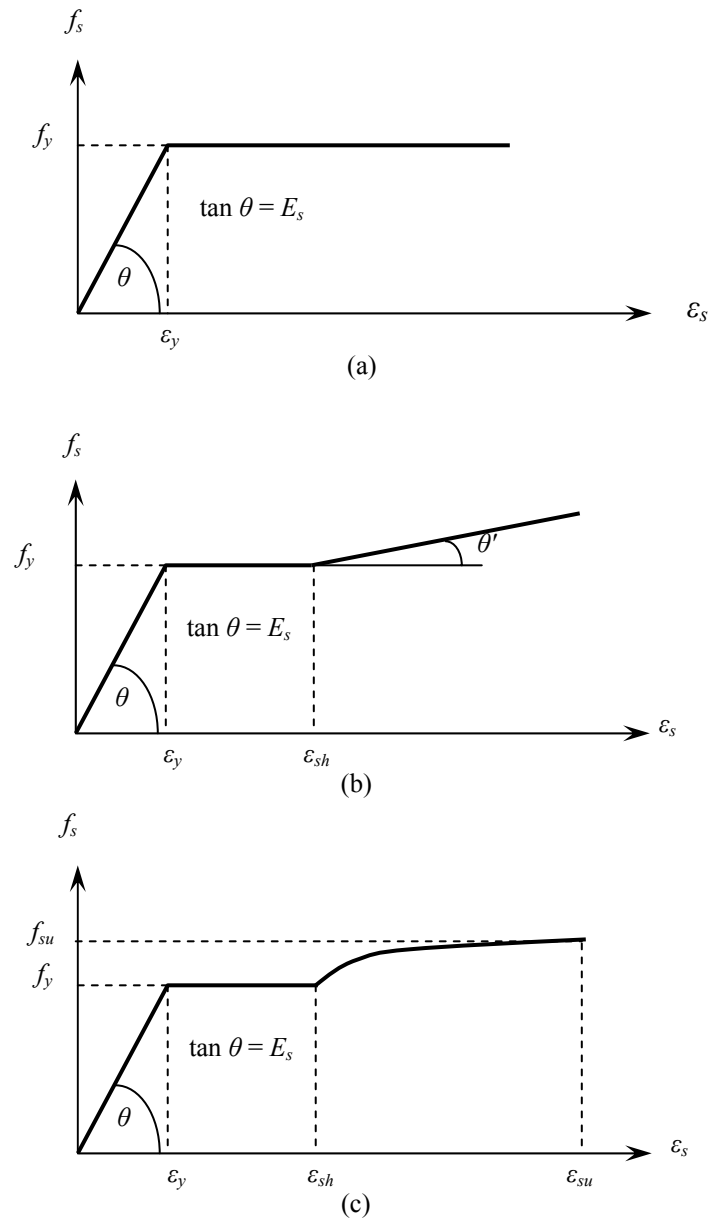
Tulangan baja yang digunakan dalam struktur beton bertulang dalam arah memanjang biasanya berfungsi menerima tegangan tarik sedang pada arah transversal difungsikan untuk menerima tegangan geser. Secara umum material baja mempunyai karakteristik yang sama atau dapat dikategorikan pada material homogen isotropik, dimana partikel pembentuk ke seluruh ke arah merupakan satu jenis partikel. Hal ini yang membuat karakteristik baja menjadi lebih sederhana dibandingkan material beton.

2.6.1. Hubungan konstitutif tegangan-regangan

Hubungan tegangan-regangan baja mempunyai beberapa jenis idealisasi seperti yang diungkapkan Park dan Paulay (1975), yaitu : *elastic perfectly plastic (bilinear)*, *trilinear*, *complete curve*.

Hubungan tegangan-regangan pada jenis *elastic perfectly plastic* dalam gambar 2.12.(a) terbagi dalam dua bagian yaitu : daerah linier elastis yang dimulai dari titik awal sampai dengan tercapai tegangan leleh dengan mengabaikan penambahan tegangan akibat *strain hardening*. Pada jenis *trilinear* dimulai dari titik awal sampai dengan tegangan leleh merupakan daerah linier elastis, kemudian daerah mendatar (*plateau*) sampai dengan awal terjadi *strain hardening*, bagian terakhir merupakan idealisasi dari *strain hardening* yang digambarkan sebagai garis lurus dengan kemiringan tertentu (θ'). Jenis ketiga merupakan kurva lengkap diawali dari daerah elastis sampai terjadi tegangan leleh (f_y) kemudian daerah

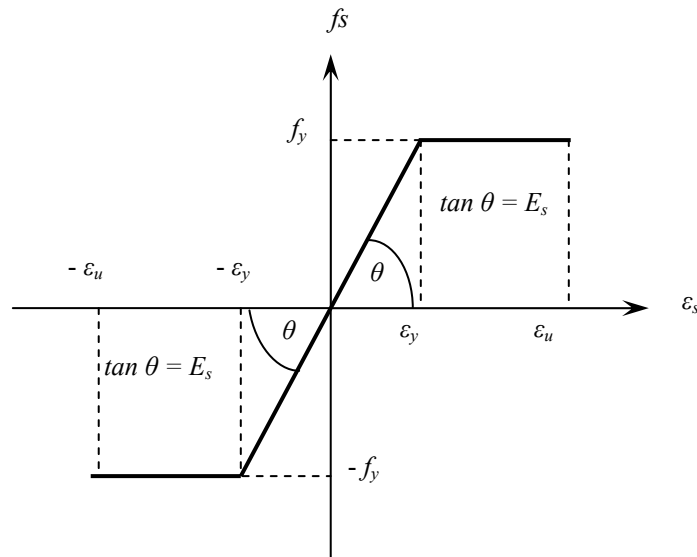
mendatar (*plateau*) sampai dengan awal *strain hardening* dan lengkung *strain hardening* hingga mencapai tegangan ultimit.



Gambar 2.12. Idealisasi hubungan tegangan-regangan
baja tulangan, Park dan Paulay (1975)
(A) *Elastic perfectly plastic*
(B) *Trilinear*
(C) *Complete Curve*

Dalam tesis ini hubungan konstitutif tegangan-regangan tulangan baja diidealisasikan sebagai fungsi bilinear, dimana daerah elastis dibatasi oleh titik awal sampai dengan terjadi leleh pertama kali dengan modulus elastisitas material baja E_s dan daerah plastis dimodelkan

sebagai garis lurus, seperti terlihat pada gambar 2.14 dengan pertimbangan kemudahan perhitungan model dan karena struktur beton bertulang sangat dipengaruhi oleh lelehnya tulangan ketika struktur menerima momen lentur monotonik, Kwak dan Filippou (1990).



Gambar 2.13. Idealisasi hubungan tegangan-regangan tulangan baja

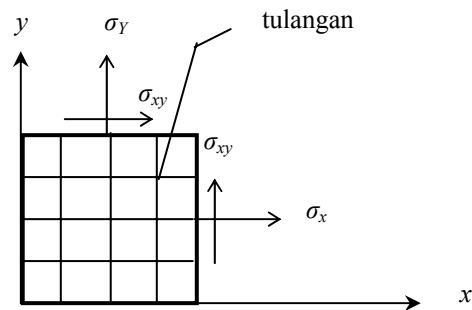
Tulangan pada struktur beton bertulang menerima pembebanan utama aksial yang bekerja sejajar dengan sumbu tulangan. Jika struktur beton bertulang telah terjadi retak dan pada daerah retak ini dikenakan tegangan geser yang bekerja tegak lurus sumbu tulangan pada bidang retak maka akan terjadi *dowel action*. Pada struktur yang dominan menerima lentur pengaruh *dowel action* dapat dianggap kecil, sehingga tesis ini mengabaikan pengaruh *dowel action* sebagai penyederhanaan pemodelan tulangan.

2.6.2. Pemodelan elemen tulangan

Analisis finite elemen beton bertulang membutuhkan suatu metode untuk memasukkan model tulangan, terdapat beberapa macam pemodelan elemen tulangan kedalam finite elemen antara lain *distributed/smeared*, *discrete*, *embedded*.

Model *distributed* menganggap bahwa tulangan terdistribusi secara merata pada elemen beton dengan arah tertentu. Hubungan tegangan-regangan dimasukkan ke dalam konstitutif material beton, sehingga pada model ini konstitutif yang digunakan adalah kekakuan komposit antara beton dan tulangan. Model ini juga menganggap bahwa interaksi antara tulangan dan beton

adalah lekat sempurna (*perfect bond*), sehingga tidak terjadi *slip* antara tulangan dan beton pada model ini. Ilustrasi dari model *distributed* dapat dilihat pada gambar 2.14.



Gambar 2.14. Model tulangan *distributed*

Dengan menganggap bahwa tulangan longitudinal (searah sumbu y) dan transversal (searah sumbu x) adalah terdistribusi merata, tesis ini memodelkan tulangan sebagai *distributed model* seperti yang dilakukan oleh Vecchio (1989) yang memodelkan tulangan longitudinal dan transversal sebagai model *distributed* untuk menganalisa perilaku *membrane* beton bertulang. Hubungan konstitutif tulangan dapat ditulis sebagai berikut, yang kemudian ditambahkan secara langsung dengan matrik kekakuan material beton, seperti yang dibahas pada sub bab sebelumnya.

$$[C] = \begin{bmatrix} \rho_{sx} \cdot E_{sx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{sy} \cdot E_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{II.31}$$

Dimana :

ρ_{sx} dan ρ_{sy} masing masing adalah rasio tulangan terhadap sumbu x dan y.

E_{sx} dan E_{sy} masing-masing adalah modulus elastisitas baja arah sumbu x dan y.

Penggabungan matrik kekakuan baja dengan kekakuan beton menjadi.

$$[D]_e = [D_c]_e + [C]_e \quad \text{II.32}$$

atau

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left[\frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_{sx} \cdot E_{sx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{sy} \cdot E_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II.33}$$

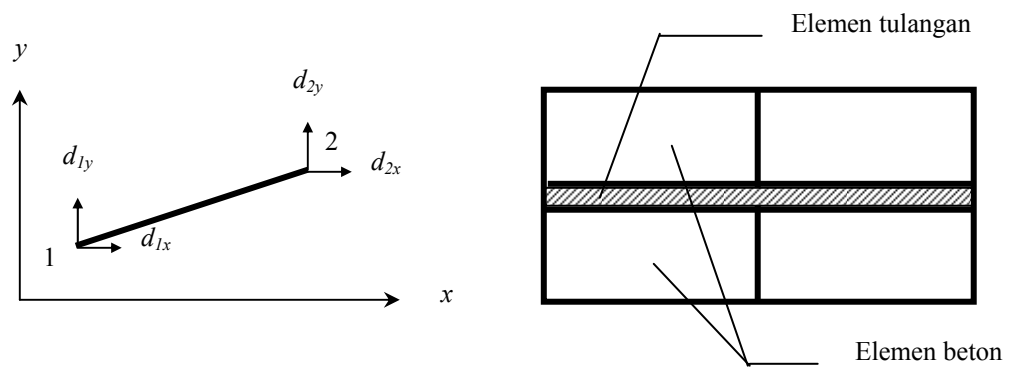
$[D_c]_e$: adalah matrik kekakuan material elemen beton

Matrik kekakuan elemen setelah mendapat pengaruh dari tulangan dapat dilihat pada persamaan II.34 dimana matrik kekakuan materialnya merupakan gabungan antara matrik kekakuan beton dan tulangan.

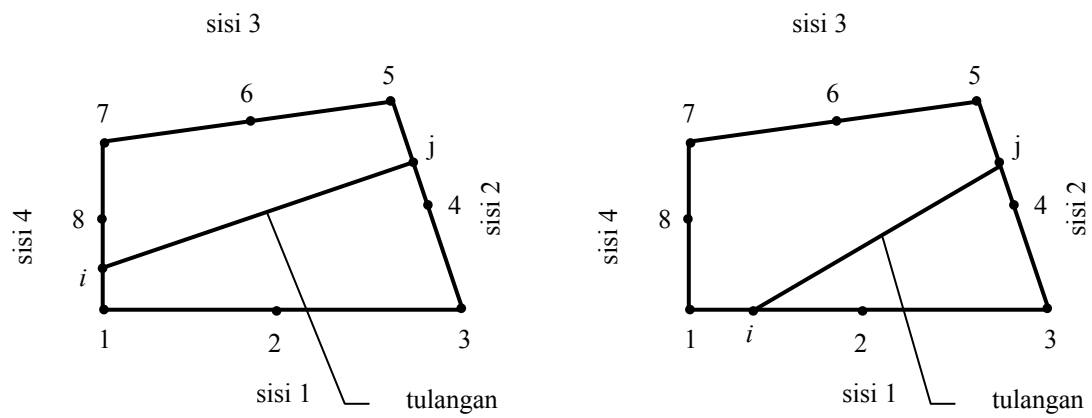
$$[k]_e = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T \cdot [D(\xi, \eta)]_e \cdot [B(\xi, \eta)] \cdot [J(\xi, \eta)] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad \text{II.34}$$

Pemodelan tulangan jenis kedua adalah *discrete* yang menganggap bahwa tulangan merupakan elemen batang satu dimensi yang mempunyai dua derajat kebebasan pada masing-masing titik nodalnya. Elemen tulangan dalam model ini ditempatkan pada *interface* elemen-elemen beton yang berdekatan. Keuntungan dari model ini adalah dapat ditambahkan pengaruh *bond slip* diantara tulangan dan beton.

Jenis pemodelan yang terakhir adalah *embedded* yang meninjau tulangan sebagai elemen batang aksial yang ditempatkan di dalam elemen isoparametrik beton, sehingga perpindahan yang terjadi merupakan perpindahan elemen-elemen beton dan tulangan. Titik-titik nodal elemen tidak harus berhimpit dengan titik-titik nodal elemen beton.



Gambar 2.15. Model tulangan *discrete*



Gambar 2.16. Model tulangan *embedded*

BAB III

METODOLOGI DAN PEMROGRAMAN

3.1. Pendahuluan

Perilaku struktur beton bertulang dapat dianalisis dengan berbagai cara antara lain dengan studi numerik seperti yang digunakan dalam tesis ini. Sebagai validasi dalam studi numerik digunakan data-data dari penelitian yang sudah dilakukan, hal ini penting sebagai kontrol terhadap keakuratan data yang dihasilkan. Data-data yang telah ada dapat berupa data numerik maupun data eksperimental yang dihasilkan oleh peneliti terdahulu.

Studi numerik dalam tesis ini digunakan untuk memprediksi perilaku struktur balok beton bertulang terutama respon beban-perpindahan sebelum dan sesudah terbentuk retak. Data-data yang dihasilkan antara lain :

- (a) Grafik hubungan inkrementasi beban dengan perpindahan struktur.
- (b) Beban ultimit yang dapat dicapai ketika struktur runtuh.
- (c) Tegangan, regangan dan arah regangan pada *gauss point*.
- (d) Retak dan arahnya yang terbentuk pada *gauss point*.

Data-data yang dibutuhkan sebagai *input* program, didapat dari hasil penelitian terdahulu baik secara numerik maupun eksperimental, antara lain :

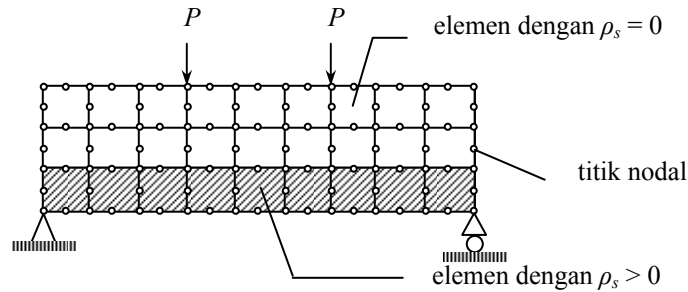
- (a) Geometrik spesimen balok beton bertulang.
- (b) Kuat tekan, kuat tarik beton dan modulus elastisitas beton.
- (c) Dimensi penampang, tegangan leleh dan modulus elastisitas tulangan.

Dari data-data yang dihasilkan kemudian dilakukan pembahasan berdasarkan tujuan penelitian seperti yang dijelaskan pada bab I, dengan cara membandingkan hasil yang didapat dengan hasil dari penelitian terdahulu.

Sebagian besar PC (*personal computer*) dewasa ini menggunakan sistem operasi *Microsoft Windows* yang berbasis grafis, dimana setiap program satu dengan lainnya mempunyai kemiripan dalam tampilan atau cara pemakaiannya. Salah satu program dibawah *Microsoft Windows* adalah *Visual Basic 6.0 Enterprise Edition* yang digunakan sebagai bahasa pemrograman dalam tesis ini, dengan pertimbangan tampilan visual grafis yang menarik serta kemudahan dalam hal pembuatan program.

3.2. Pemodelan Struktur Beton Bertulang

Struktur beton bertulang yang dianalisa dalam tesis ini ditinjau sebagai struktur dua dimensi tegangan bidang (*plane stress*). Elemen beton menggunakan elemen *quadrilateral* delapan titik nodal sedangkan tulangan mengambil model *distributed (smeared)* baik untuk arah longitudinal maupun transversal. Pemodelan tersebut dapat dilihat pada gambar V.1.



Gambar 3.1. Pemodelan struktur beton bertulang

Vektor perpindahan setiap inkrementasi beban $\{d_{inc}\}$ didapatkan dengan menggunakan persamaan III.1.

$$\{d_{inc}\} = [K]_{str}^{-1} \cdot \{P_{inc}\} \quad \text{III.1}$$

dimana : $[K]_{str}^{-1}$: matrik kekakuan struktur

3.3. Algoritma Program

Respon nonlinier dari suatu struktur beton bertulang biasanya didapatkan dengan cara menerapkan pembebanan secara bertahap (inkrementasi beban). Dalam kasus nonlinier penyelesaian persamaan V.1 biasanya tidak cukup dilakukan satu kali guna mendapatkan hasil yang konvergen. Metode iterasi diperlukan untuk mendapatkan hasil yang konvergen, perbedaan antara gaya luar dan gaya ekuivalen (gaya reaksi yang dilakukan struktur) pada titik nodal menyebabkan timbulnya gaya-gaya sisa (*residual force*). Oleh karena itu untuk mendapatkan kondisi konvergen gaya-gaya sisa harus dikoreksi pada iterasi-iterasi berikutnya sampai batas toleransi yang ditentukan.

Tegangan-tegangan beton yang diperoleh pada setiap pertambahan pembebanan adalah tegangan-tegangan dalam arah sumbu global di *Gauss point*, karena tegangan dan regangan yang paling akurat dalam finite elemen terjadi pada *Gauss point* seperti yang dikatakan Cook

et. al (2002). Lingkaran *Mohr* digunakan untuk mendapatkan tegangan utama tarik dan tekan serta arahnya pada setiap *Gauss point* yang ditinjau. Tegangan–tegangan utama kemudian dievaluasi untuk mengetahui apakah tegangan di *Gauss point* tersebut telah mencapai tegangan retak. Jika tegangan pada titik *Gauss* tersebut telah melewati tegangan retak maka matrik kekakuan material beton diubah dari isotropik ke orthotropik, seperti yang dijelaskan pada bab II. Secara skematis langkah-langkah yang diperlukan untuk analisis nonlinier struktur beton bertulang disajikan dalam bentuk diagram alir (*flow chart*) dan dapat dilihat pada gambar V.2 dengan penjelasan sebagai berikut.

- 1) *Input* data.
- 2) Nalkan semua gaya, tegangan dan regangan.
- 3) Bentuk vektor beban inkrementasi $\{P_{inc}\}$
- 4) Bentuk matrik beban.
- 5) Bentuk matrik regangan-perpindahan [BMAT]
- 6) Apakah tegangan pada *Gauss point* telah mencapai tegangan retak ?
 - Jika ya, hitung matrik kekakuan material [DMAT] orthotropik.
 - Jika tidak, hitung matrik kekakuan material [DMAT] isotropik.
- 7) Rangkai matrik kekakuan material elemen beton [DMAT]
- 8) Tambahkan matrik kekakuan elemen beton dengan ratio luas tulangan terhadap luas penampang beton (ρ_s) untuk arah sumbu x dan y [DMAT]
- 9) Bentuk matrik kekakuan elemen $[k]_e$ atau [Selem]
- 10) Bentuk matrik kekakuan struktur $[K]_{str}$ atau [STIFFSTR]
- 11) Hitung perpindahan (*displacement*), gunakan persamaan III.1.
- 12) Hitung tegangan dan regangan pada elemen.
- 13) Hitung gaya-gaya pada titik nodal.
- 14) Hitung gaya residu, masukan gaya residu sebagai $\{P_{inc}\}$.
- 15) Evaluasi konvergenitas, apakah telah konvergen ? dengan menggunakan persamaan III.2.

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\phi_i^r)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f_i)^2}} \times 100 \leq \text{toleransi} \quad \text{III.2}$$

dimana :

ϕ : gaya residu pada titik nodal ke i .

f_i : gaya ekuivalen pada titik nodal ke i .

N : jumlah titik nodal.

r : proses iterasi ke r dalam tesis ini digunakan iterasi maksimum 30 kali iterasi.
nilai toleransi menurut Owen Hinton (1980) cukup diambil 1.

- jika tidak, kembali ke langkah 3.
- jika ya, lanjutkan langkah selanjutnya.

16) Hitung tegangan-tegangan utama dan arahnya pada *Gauss point*.

17) Cetak tegangan, regangan, arah tegangan dan *displacement*.

18) Apakah masih ada beban selanjutnya ?

- Jika ya, kembali ke langkah 3.
- Jika tidak, lanjutkan langkah berikutnya.

19) Plot gambar *displacement* dan pola retak yang terbentuk.

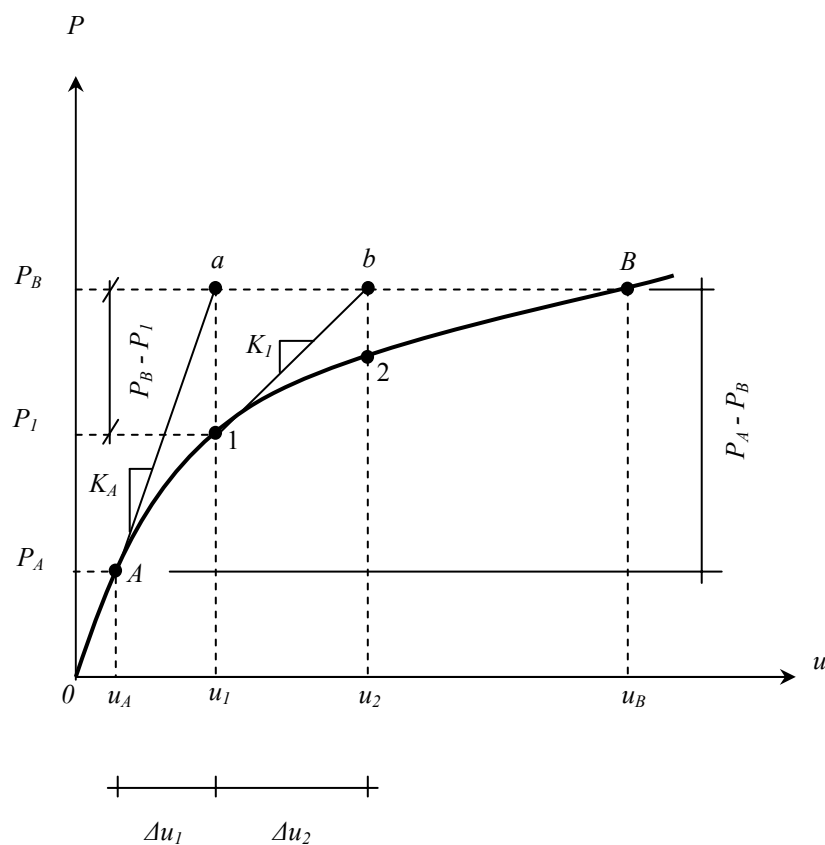
20) Selesai.

3.4. Penyelesaian Nonlinieritas

Permasalahan nonlinier dapat didekati dengan beberapa metode antara lain:

- a) Metode Newton-Rapshon (*Newton-Rapshon methods*)
- b) Metode Modifikasi Newton-Rapshon (*modified Newton-Rapshon methods*)
- c) Metode iterasi langsung (*direct iteration methods*)
- d) Metode kekakuan tangensial (*tangential stiffness methods*)

Dalam tesis ini digunakan metode *Newton-Rapshon*, langkah-langkah dalam setiap kali iterasi dalam metode *Newton-Rapshon* dapat dilustrasikan pada gambar III.2.



Gambar 3.3. Metode Newton-Rapshon

Anggap kondisi konvergen telah tercapai pada pembebanan P_A , perpindahan yang didapat pada pembebanan tersebut adalah u_A . Jika pembebanan berikutnya adalah P_B maka inkrementasi beban yang harus dikenakan pada struktur adalah $P_B - P_A$. Pada iterasi pertama inkrementasi beban ($P_B - P_A$) dapat diinterpretasikan sebagai suatu ketidak seimbangan gaya atau gaya residu. Iterasi pertama dimulai dari pembentukan kekakuan tangen K_A akibat

perpindahan struktur u_A . Sehingga pertambahan perpindahan $\Delta u_I = [K_A]^{-1} (P_B - P_A)$. Dengan demikian perpindahan keseluruhan menjadi $u_I = u_A + \Delta u_I$, dengan mengurai perpindahan struktur u_I menjadi perpindahan titik nodal elemen maka tegangan-tegangan pada elemen dapat dihitung. Gaya-gaya ekuivalen pada titik-titik nodal merupakan hasil penjumlahan dari seluruh gaya ekuivalen elemen yang ada, anggap gaya ekuivalen tersebut adalah P_I . selisih antara gaya luar dan gaya ekuivalen ($P_B - P_I$) merupakan gaya sisa yang harus diselesaikan pada iterasi berikutnya.

Iterasi kedua dimulai juga dengan membentuk kekakuan tangen struktur K_I baru pada akhir iterasi pertama. Pertambahan perpindahan Δu_2 akibat gaya residu dapat ditentukan, dimana $u_2 = u_I + \Delta u_2$. Dengan mengurai perpindahan struktur u_2 menjadi perpindahan-perpindahan titik nodal pada elemen maka tegangan-tegangan pada elemen dapat dihitung. Selisih antara gaya luar dan gaya ekuivalen ($P_B - P_2$) merupakan gaya residu yang harus diselesaikan pada iterasi ketiga, demikian dan seterusnya iterasi dilakukan sampai kondisi konvergen tercapai, seperti yang dikemukakan Nuroji (2004).

3.5. Pemilihan Orde Gauss Quadratur

Jumlah titik *Gauss* yang digunakan dalam mengevaluasi matrik kekakuan pada elemen *quadrilateral* 8 titik nodal ditentukan dengan cara membuat perbandingan analisis integrasi *Gauss* dengan menggunakan orde 2×2 , 3×3 , 4×4 dan 5×5 sebagai berikut.

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_i \sum_j W_i \cdot W_j \cdot \phi(\xi_i, \eta_j)$$

dimana : $\phi(\xi, \eta)$ merupakan salah satu elemen matrik kekakuan untuk elemen *quadrilateral* 8 titik nodal, dengan fungsi sebagai berikut untuk harga elastisitas beton (E_c) = 25000 MPa serta *Poisson ratio* (ν) = 0.2.

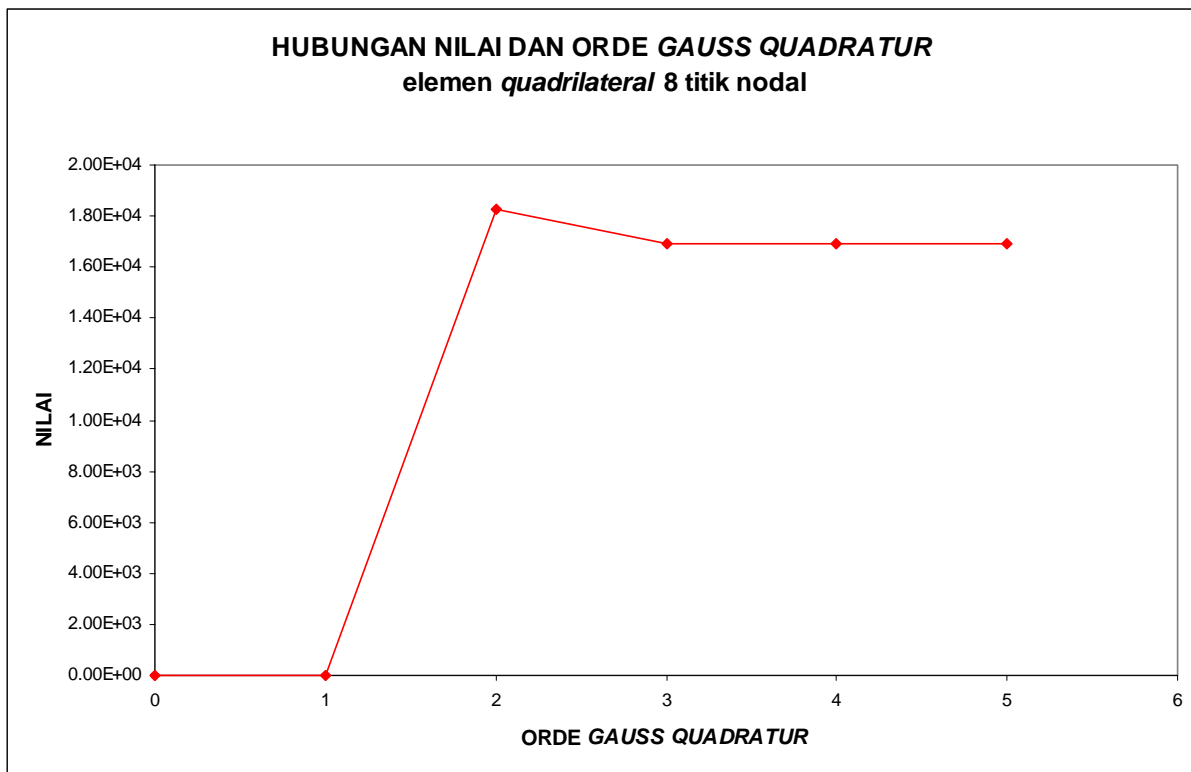
$$\phi(\xi, \eta) = 1627.6 \times \{\xi^2 - \xi^2 \eta^2 - 2\eta^4 - \xi \eta^4 + \xi \eta^3 + \xi^2 \eta^3 - \xi^2 \eta^4\} + 10416.67 \times \{\xi^2 - 2\xi^2 \eta + \xi^2 \eta^2\}$$

Hasil analisis dapat dilihat dalam tabel berikut

Tabel 3.1. Analisis *Gauss Quadratur*

ORDE GAUSS QUADRATUR 2 x 2					
W1	=	1			
ξ dan η	=	0.5773502692			
ξ dan η	=	-0.5773502692			
1	(ξ, η)	-0.5773502692	-0.5773502692	=	8759.5722269
2	(ξ, η)	-0.5773502692	0.5773502692	=	587.9482101
3	(ξ, η)	0.5773502692	-0.5773502692	=	8189.0621606
4	(ξ, η)	0.5773502692	0.5773502692	=	740.8159217
TOTAL					18277.3985192
ORDE GAUSS QUADRATUR 3 X 3					
W1	=	0.555555555556			
W2	=	0.888888888889			
ξ dan η	=	-0.774596692241			
ξ dan η	=	0.000000000000			
ξ dan η	=	0.774596692241			
1	(ξ, η)	-0.774596692241	-0.774596692241	=	5906.047099
2	(ξ, η)	-0.774596692241	0	=	3568.672805
3	(ξ, η)	-0.774596692241	0.774596692241	=	-152.3073797
4	(ξ, η)	0	-0.774596692241	=	-578.702291
5	(ξ, η)	0	0	=	0
6	(ξ, η)	0	0.774596692241	=	-578.702291
7	(ξ, η)	0.774596692241	-0.774596692241	=	5264.195116
8	(ξ, η)	0.774596692241	0	=	3568.672805
9	(ξ, η)	0.774596692241	0.774596692241	=	-70.78149805
TOTAL					16927.0943644
ORDE GAUSS QUADRATUR 4 X 4					
W1	=	0.347854845137			
W2	=	0.652145154863			
ξ dan η	=	-0.861136344594			
ξ dan η	=	-0.339981043585			
ξ dan η	=	0.339981043585			
ξ dan η	=	0.861136311594			
1	(ξ, η)	-0.861136344594	-0.861136344594	=	3086.748022
2	(ξ, η)	-0.861136344594	-0.339981043585	=	3381.000237
3	(ξ, η)	-0.861136344594	0.339981043585	=	994.4987039
4	(ξ, η)	-0.861136344594	0.861136311594	=	-162.9214785

5	(ξ, η)	-0.339981043585	-0.861136344594	=	649.5213681
6	(ξ, η)	-0.339981043585	-0.339981043585	=	979.8866075
7	(ξ, η)	-0.339981043585	0.339981043585	=	271.3062953
8	(ξ, η)	-0.339981043585	0.861136311594	=	-397.1264962
9	(ξ, η)	0.339981043585	-0.861136344594	=	351.1420919
10	(ξ, η)	0.339981043585	-0.339981043585	=	955.1019064
11	(ξ, η)	0.339981043585	0.339981043585	=	283.5142087
12	(ξ, η)	0.339981043585	0.861136311594	=	-374.8637307
13	(ξ, η)	0.861136311594	-0.861136344594	=	2683.622861
14	(ξ, η)	0.861136311594	-0.339981043585	=	3347.514642
15	(ξ, η)	0.861136311594	0.339981043585	=	1010.992111
16	(ξ, η)	0.861136311594	0.861136311594	=	-132.8434041
TOTAL					16927.0939449
ORDE GAUSS QUADRATUR 5 X 5					
W1	=	0.236926885056			
W2	=	0.478628670499			
W3	=	0.568888888889			
ξ dan η	=	-0.906179845939			
ξ dan η	=	-0.538469310106			
ξ dan η	=	0.000000000000			
ξ dan η	=	0.538469310106			
ξ dan η	=	0.906179845939			
1	(ξ, η)	-0.906179845939	-0.906179845939	=	1645.893372
2	(ξ, η)	-0.906179845939	-0.538469310106	=	2376.227922
3	(ξ, η)	-0.906179845939	0.000000000000	=	1333.064235
4	(ξ, η)	-0.906179845939	0.538469310106	=	282.0718287
5	(ξ, η)	-0.906179845939	0.906179845939	=	-106.113611
6	(ξ, η)	-0.538469310106	-0.906179845939	=	1070.210134
7	(ξ, η)	-0.538469310106	-0.538469310106	=	1673.996599
8	(ξ, η)	-0.538469310106	0.000000000000	=	950.8862244
9	(ξ, η)	-0.538469310106	0.538469310106	=	154.7773636
10	(ξ, η)	-0.538469310106	0.906179845939	=	-239.530265
11	(ξ, η)	0.000000000000	-0.906179845939	=	-295.8537435
12	(ξ, η)	0.000000000000	-0.538469310106	=	-74.51567875
13	(ξ, η)	0.000000000000	0.000000000000	=	0
14	(ξ, η)	0.000000000000	0.538469310106	=	-74.51567875
15	(ξ, η)	0.000000000000	0.906179845939	=	-295.8537435
16	(ξ, η)	0.538469310106	-0.906179845939	=	788.2687955
17	(ξ, η)	0.538469310106	-0.538469310106	=	1577.545372
18	(ξ, η)	0.538469310106	0.000000000000	=	950.8862244
19	(ξ, η)	0.538469310106	0.538469310106	=	183.7120983
20	(ξ, η)	0.538469310106	0.906179845939	=	-225.6534108
21	(ξ, η)	0.906179845939	-0.906179845939	=	1411.023217
22	(ξ, η)	0.906179845939	-0.538469310106	=	2295.879596
23	(ξ, η)	0.906179845939	0.000000000000	=	1333.064235
24	(ξ, η)	0.906179845939	0.538469310106	=	306.1757989
25	(ξ, η)	0.906179845939	0.906179845939	=	-94.55355062
TOTAL					16927.0933333



Gambar 3.4. Grafik hubungan orde *Gauss Quadratur* dengan hasil integrasi *Gauss*.

Grafik 3.4. menunjukkan orde 2×2 memiliki nilai yang berbeda sementara untuk orde 3×3 , 4×4 dan 5×5 menunjukkan nilai yang sama, untuk itu dalam tesis ini digunakan orde 3×3 dalam mengevaluasi matrik kekakuan.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

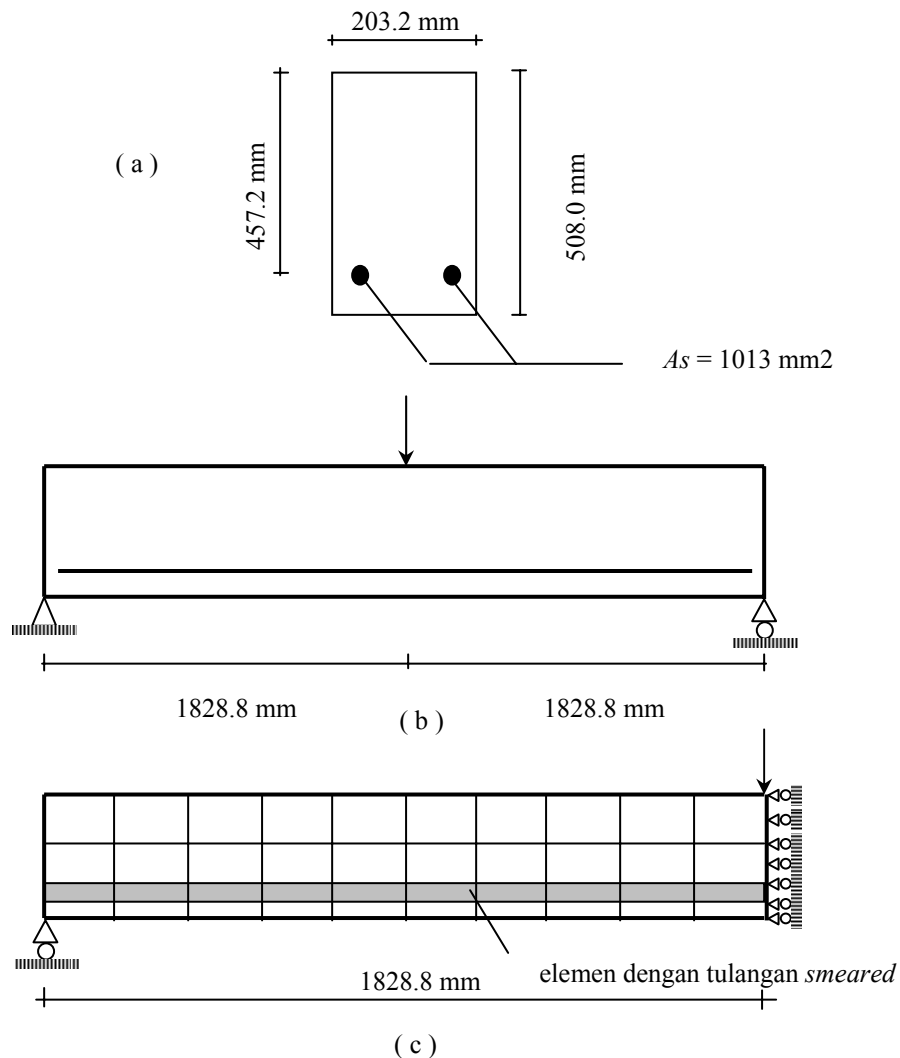
4.1. Pendahuluan

Tingkat akurasi dan stabilitas model yang diusulkan dalam mensimulasikan respon struktur beton bertulang dapat dibandingkan dengan hasil ekperimental dan kajian numerik yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya, hal tersebut meliputi beberapa parameter yang mempengaruhi respon struktur beton bertulang antara lain :

- a) Pengujian struktur balok beton bertulang yang mempunyai *under* dan *over reinforcement*.
- b) Pengujian struktur balok beton bertulang yang mengalami dominasi lentur, dominasi geser dan lentur murni.
- c) Pengujian struktur balok tinggi.

4.2. Balok *Under Reinforced* (J4)

Pengujian-pengujian tersebut menggunakan beberapa sampel struktur beton bertulang, yang pertama adalah balok J4 yang dilakukan pengujian secara eksperimental oleh Burn dan Siess (1962) serta diuji secara numerik oleh Kwak dan Filippou (1990) dan Nuroji (2004), balok tersebut mempunyai lebar dan tinggi total penampang 203.2 mm dan 508 mm. Tulangan yang terpasang pada balok J4 merupakan tulangan tunggal dengan luas A_s (1013 mm²), modulus elastisitas beton $E_c = 26201$ MPa dengan kuat tekan $f'_c = 33.23$ MPa. Material baja tulangan mempunyai elastisitas $E_s = 203402.5$ MPa dengan tegangan leleh $f_y = 309.5$ MPa. Balok J4 mempunyai panjang bentang total 3657.6 mm ditumpu oleh perletakan sederhana sendi dan rol, pembebanan yang dikenakan pada struktur adalah beban terpusat ditengah bentang. Pengujian ini menggunakan 40 elemen dan karena sifat yang simetris maka pengujian dilakukan setengah bentang tanpa mempengaruhi ketelitian. Hasil pengujian tersebut kemudian dibandingkan dengan hasil pengujian eksperimental dan pengujian numerik hasil dari penelitian terdahulu. Keterangan tambahan ft adalah koefisien tegangan tarik, β yang disimbolkan dengan bt adalah koefisien geser dan NG adalah orde titik *Gauss*.



Gambar 4.1. Struktur balok J4
 (a) Penampang balok
 (b) Pembebanan
 (c) Diskritisasi balok J4 (40 elemen)

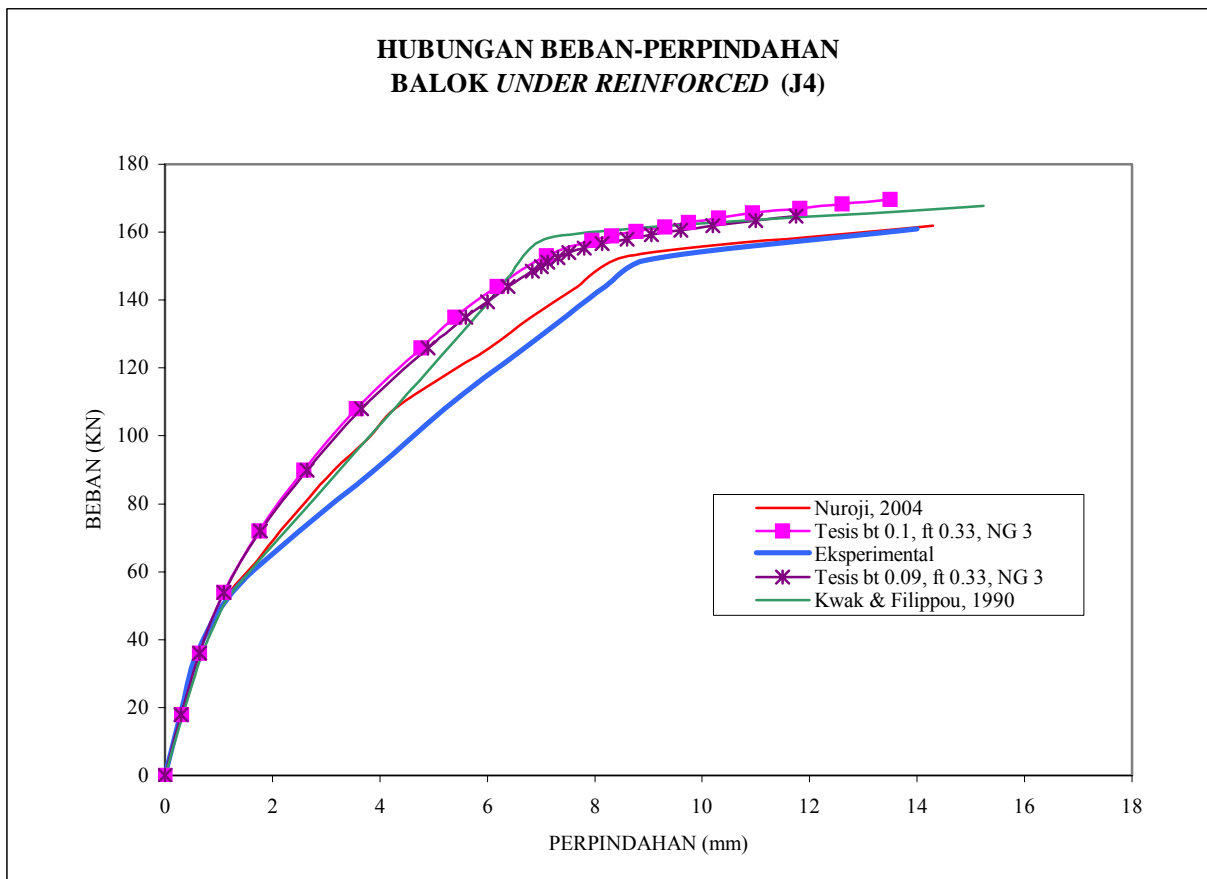
Struktur balok J4 merupakan balok dengan *under reinforcement*, tujuan dari pengujian ini adalah mengetahui respon struktur balok beton bertulang yang mempunyai tulangan *under reinforced*. Inkrementasi beban yang dikenakan pada struktur balok J4 dapat dilihat pada Tabel 4.1 yang diawali dengan selisih pembebanan 18000 N sampai pada inkrementasi ke 7, kemudian menjadi 9000 N pada inkrementasi selanjutnya.

Tabel 4.1. Inkrementasi beban balok J4

No.	Penambahan beban (N)	Kumultaif beban (N)
1	18.000	18.000
2	18.000	36.000
3	18.000	54.000
4	18.000	72.000
5	18.000	90.000
6	18.000	108.000
7	18.000	126.000
8	9.000	135.000
9	9.000	144.000
10	9.000	153.000
11	4.500	157.500
12	1.350	158.850
13	1.350	160.200
14	1.350	161.550
15	1.350	162.900
16	1.350	164.250
17	1.350	165.600
18	1.350	166.950
19	1.350	168.300
20	1.350	169.650

Gambar 4.2 menunjukkan bahwa respon struktur yang didapat dari hasil analisis dengan menggunakan nilai β 0.09 dan 0.1 berhimpit dengan hasil ekperimental sampai dengan tingkat beban sebesar 54 KN setelah itu terjadi perbedaan. Hal tersebut dapat dipahami karena pada model penulangan *smeared* seperti yang digunakan dalam tesis ini menganggap bahwa lekatan tulangan dengan beton adalah lekat sempurna sehingga tidak terjadi *slip* antara tulangan dan beton, dengan demikian kekakuan struktur setelah terjadi retak menjadi lebih besar dibandingkan kekakuan yang sebenarnya, padahal retak yang melintasi tulangan akan terjadi *slip* yang mengakibatkan berkurangnya kekakuan beton bertulang dan menyebabkan terjadinya deformasi tambahan akibat adanya *slip*.

Pada nilai koefisien geser yang lebih kecil perpindahan yang terjadi akan semakin mendekati nilai yang sebenarnya, dengan kecenderungan kapasitas pikul beban berkurang menjadi lebih kecil dan perpindahan pada beban puncak menjadi lebih kecil seperti nampak pada kurva dengan nilai β 0.09.



Gambar 4.2. Respon beban dan perpindahan di tengah bentang balok J4

Nilai β yang lebih besar memberikan respon beban-perpindahan yang semakin menjauh dari respon beban-perpindahan hasil eksperimental, sementara pada nilai β kurang kecil dari 0.09 mengakibatkan sistem akan mengalami degradasi kekakuan yang cepat setelah retak terbentuk.

Pada tabel 4.2. terlihat bahwa semakin besar nilai β yang digunakan akan semakin meningkatkan kekakuan struktur yang ditandai oleh beban maksimum yang dapat diterima oleh balok J4, pada penggunaan nilai β 0.09 beban maksimum yang dapat diterima sebesar 164.7 KN sementara untuk nilai β 0.1 beban maksimumnya adalah 169.65 KN akan tetapi respon beban-perpindahan lebih mendekati hasil uji ekperimental pada nilai β 0.09.

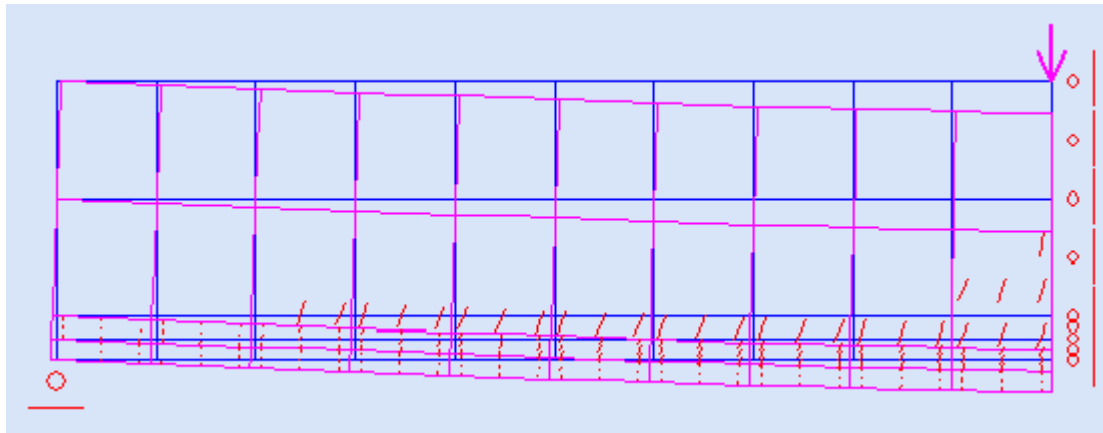
Dalam gambar 4.2. juga disajikan hasil uji numerik yang dilakukan oleh Kwak & Filippou (1990) serta Nuroji (2004) dengan tujuan sebagai pembanding dimana kedua peneliti tersebut menggunakan model retak dan tulangan *discrete*.

Tabel 4.2. Beban dan perpindahan balok *under reinforced* (J4)

Inkrementasi	$\beta = 0.1$		$\beta = 0.09$	
	Beban (N)	Kumulatif Perpindahan (mm)	Beban (N)	Kumulatif Perpindahan (mm)
1	18.000	0.31	18	0.30
2	36.000	0.64	36	0.64
3	54.000	1.1	54	1.10
4	72.000	1.75	72	1.78
5	90.000	2.58	90	2.64
6	108.000	3.56	108	3.66
7	126.000	4.77	126	4.90
8	135.000	5.4	135	5.60
9	144.000	6.18	139.5	6.00
10	153.000	7.1	144	6.38
11	157.500	7.95	148.5	6.84
12	158.850	8.32	149.85	7.00
13	160.200	8.77	151.2	7.12
14	161.550	9.3	152.55	7.32
15	162.900	9.75	153.9	7.52
16	164.250	10.31	155.25	7.80
17	165.600	10.94	156.6	8.14
18	166.950	11.82	157.95	8.60
19	168.300	12.6	159.3	9.05
20	169.650	13.5	160.65	9.60
21			162	10.20
22			163.35	11.00
23			164.7	11.74

Di daerah tengah bentang pada serat terluar retak yang terjadi hampir tegak lurus dengan sumbu mendatar hal ini disebabkan pada daerah lentur tegangan geser yang terjadi sangat kecil dan dapat dikatakan sama dengan nol sementara mendekati garis netral arah retak yang terbentuk mengalami kemiringan terhadap sumbu mendatar, hal ini disebabkan karena tegangan geser menjadi maksimum saat mendekati garis netral. Di daerah tumpuan kemiringan retak akan semakin besar yang menunjukkan bahwa semakin besar tegangan geser yang terjadi maka arah retak akan sejajar sumbu mendatar karena sudut tegangan utama tarik dan tekan sangat dipengaruhi oleh besarnya tegangan geser yang terjadi, hal tersebut sesuai dengan tinjauan pustaka pada bab II. Pada daerah disekitar tumpuan tidak terjadi retak,

hal ini menunjukkan bahwa daerah tersebut terjadi kombinasi tegangan tekan-tekan padahal kriteria terjadi retak berdasarkan tegangan tarik yang melebihi tegangan retak.

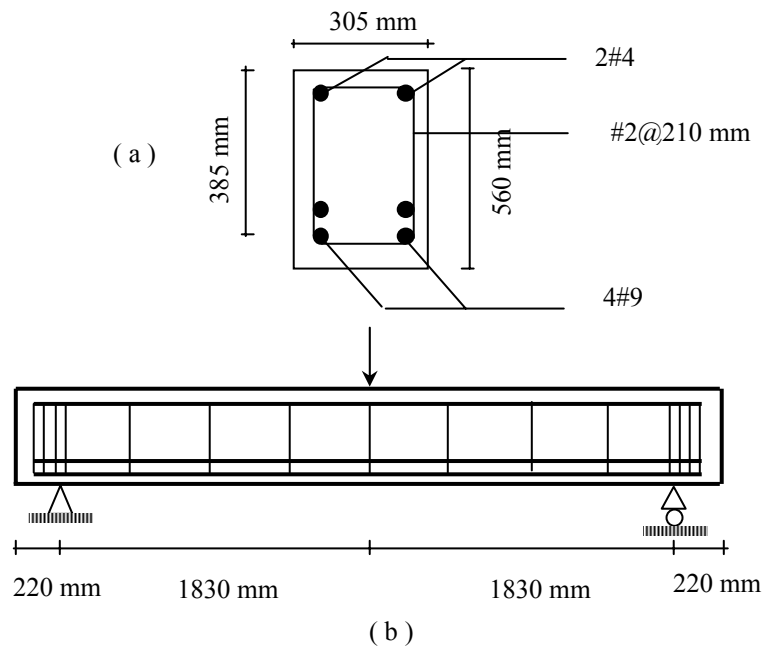


Gambar 4.3. Pola retak balok *under reinforced* (J4) saat terdeformasi

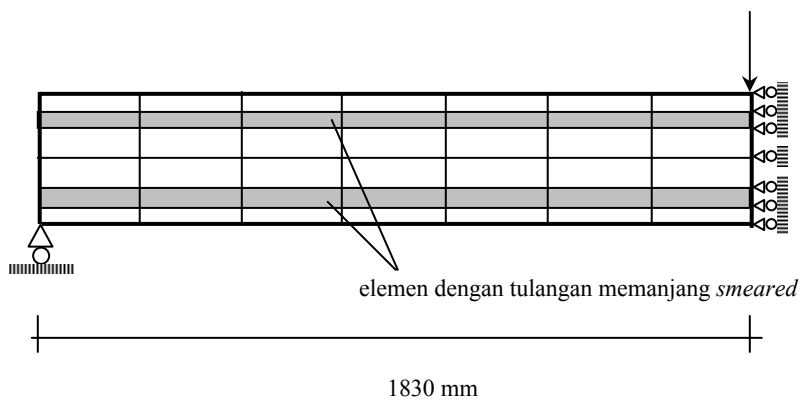
4.3. Balok *Over Reinforced* (OA1)

Struktur balok OA1 merupakan hasil pengujian eksperimental yang dilakukan oleh Bresler dan Scordelis (1963) yang kemudian dilakukan pengujian numerik oleh beberapa peneliti sebelumnya antara lain Ngo dan Scordelis (1967), Vecchio, F.J.(1989), Kwak dan Filippou (1990) dan Nuroji (2004). Struktur ini mempunyai tulangan *over reinforced* yang diberi beban di tengah bentang, lebar penampang 305 mm, tinggi 553 mm. Panjang balok keseluruhan 4100 mm, dengan jarak tepi ke tumpuan sederhana 220 mm, tulangan yang digunakan adalah tulangan tarik memanjang 4#9, tulangan tekan 2#4 dan sengkang #2 @210 mm. Material beton yang digunakan mempunyai propertis sebagai berikut : kuat tekan beton $f'_c = 24.1$ MPa, modulus elastisitas $E_c = 23215.5$ MPa, *Poisson ratio* $\nu = 0.2$ sedangkan propertis material baja yang digunakan adalah sebagai berikut :

$f_y = 555$ MPa	$E_s = 217882$ MPa	untuk tulangan #9
$f_y = 345$ MPa	$E_s = 200000$ MPa	untuk tulangan #4
$f_y = 325$ MPa	$E_s = 200000$ MPa	untuk tulangan #2



Gambar 4.4. Struktur balok OA1
(a) Penampang
(b) Pembebanan



Gambar 4.5. Diskritisasi balok OA1 (42 elemen)

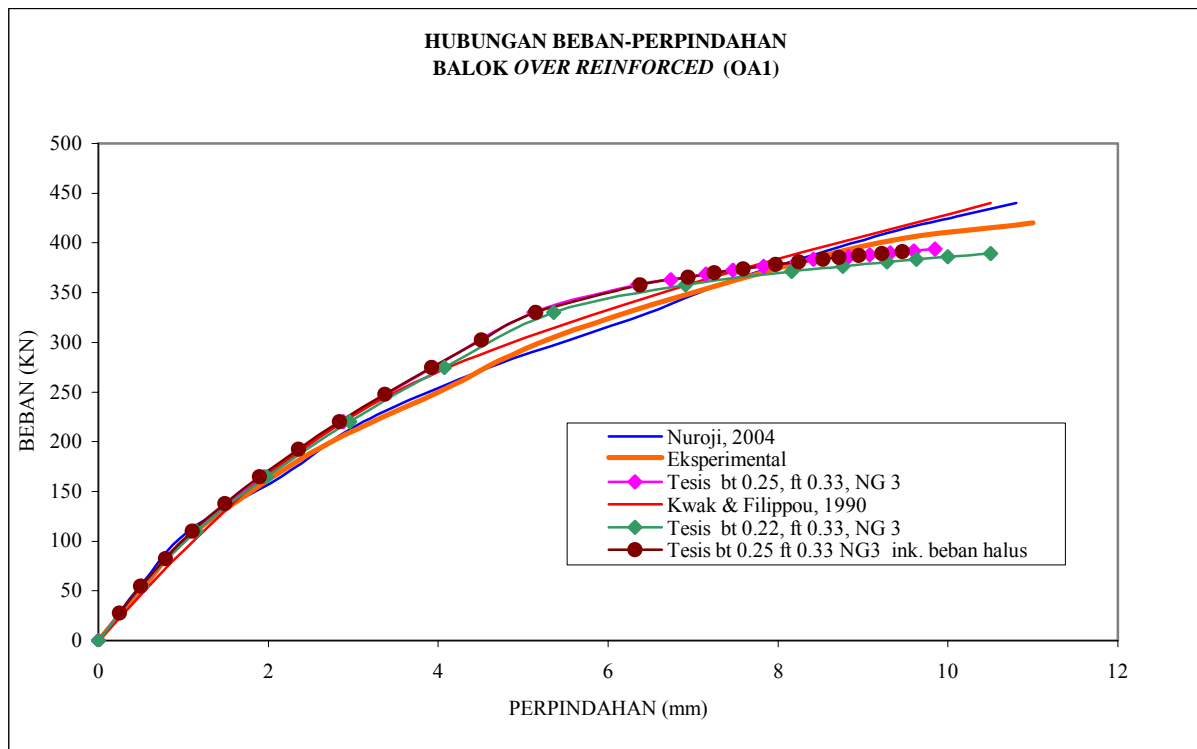
Struktur balok OA1 dibebani ditengah bentang dengan dua tipe inkrementasi beban yang berbeda dengan tujuan menyelidiki pengaruh laju pembebanan terhadap respon beban perpindahan. Perbedaan kedua tipe tersebut terletak pada besar pertambahan beban yang diterapkan, dimana pada inkrementasi beban kasar pertambahan beban pada tahap awal adalah 55 KN sedang pada inkrementasi beban halus 27.5 KN seperti yang ditampilkan pada tabel 4.3 dibawah ini.

Tabel 4.3. Inkrementasi beban balok *over reinforced* (OA1)

No.	Inkrementasi beban Kasar		Inkrementasi beban Halus	
	Penambahan beban (N)	Kumulatif beban (N)	Penambahan beban (N)	Kumulatif beban (N)
1	55.000	55.000	27.500	27.500
2	55.000	110.000	27.500	55.000
3	55.000	165.000	27.500	82.500
4	55.000	220.000	27.500	110.000
5	55.000	275.000	27.500	137.500
6	55.000	330.000	27.500	165.000
7	27.500	357.500	27.500	192.500
8	5.500	363.000	27.500	220.000
9	5.500	368.500	27.500	247.500
10	4.125	372.625	27.500	275.000
11	4.125	376.750	27.500	302.500
12	4.125	380.875	27.500	330.000
13	2.750	383.625	27.500	357.500
14	2.750	386.375	8.250	365.750
15	1.925	388.300	4.125	369.875
16	1.925	390.225	4.125	374.000
17	1.925	392.150	4.125	378.125
18	1.925	394.075	2.750	380.875
19			2.750	383.625
20			1.925	385.550
21			1.925	387.475
22			1.925	389.400
23			1.925	391.325

Pada balok OA1 ini selain ditulangi *over reinforced* juga menggunakan tulangan sengkang #2 dengan jarak 210 mm yang terpasang sepanjang bentang serta tulangan tekan 2#4 dimana semua tulangan diasumsikan *smeared* atau terdistribusi merata dalam elemen beton. Koefisien tarik yang digunakan adalah 0.33 seperti yang dilakukan oleh peneliti sebelumnya yaitu Vecchio (1988) yang menggunakan kuat tarik beton sebesar 0.33 untuk menganalisa balok OA1. Selain itu juga diuji dengan menggunakan dua inkrementasi beban yang berbeda yaitu inkrementasi beban kasar dan beban halus dengan tujuan mengetahui pengaruh inkrementasi pembebanan pada respon stuktur.

Respon struktur yang didapat adalah berupa hubungan beban dan perpindahan yang kemudian dibandingkan dengan hasil eksperimental yang dilakukan oleh Bresler dan Scordelis (1963) serta hasil pendekatan numerik yang dilakukan oleh Nuroji (2004) seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.6.



Gambar 4.6. Respon beban dan perpindahan balok OA1

Gambar 4.6 menunjukkan kurva beban-perpindahan pada balok OA1 yang ditulangi *over reinforced* memiliki ketepatan yang sangat baik ketika beban belum mencapai beban retak yaitu 165 KN, setelah itu kurva menunjukkan respon yang lebih kaku sampai tahap pembebanan 357.5 KN, akan tetapi pada tahap pembebanan selanjutnya menunjukkan hal sebaliknya sampai pada beban maksimum sebesar 389.125 KN.

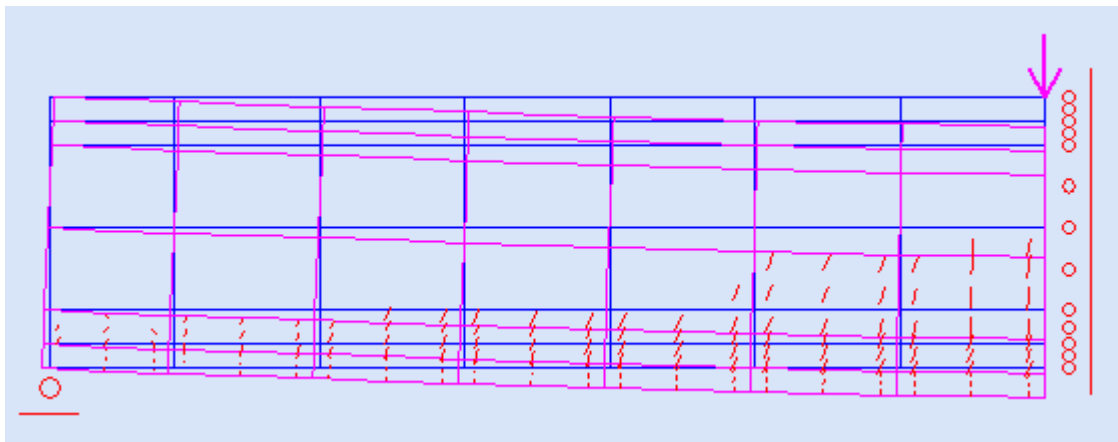
Hasil analisis yang diperoleh menunjukkan bahwa nilai koefisien geser yang paling mendekati adalah 0.22, kurva yang menggunakan nilai β 0.25 tidak menunjukkan peningkatan kekakuan struktur yang signifikan, hal ini dikarenakan tipe pembebanan yang dikenakan pada balok OA1 masih didominasi pengaruh lentur sementara pengaruh koefisien geser akan lebih dominan manakala terjadi dominasi geser yang bekerja pada struktur.

Respon struktur dengan menggunakan koefisien β 0.25 yang sama tetapi dengan inkrementasi beban yang berbeda menunjukkan kurva beban perpindahan yang berhimpit, hal ini menunjukkan bahwa inkrementasi beban yang diterapkan sudah optimum sehingga respon pada inkrementasi beban halus sama dengan respon pada inkrementasi beban kasar.

Tabel 4.4. Beban dan perpindahan balok OA1

Inkrementasi	$\beta = 0.22$		$\beta = 0.25$	
	Beban (N)	Kumulatif Perpindahan (mm)	Beban (N)	Kumulatif Perpindahan (mm)
1	55.000	0.51	55.000	0.51
2	110.000	1.15	110.000	1.14
3	165.000	1.98	165.000	1.95
4	220.000	2.96	220.000	2.88
5	275.000	4.07	275.000	3.94
6	330.000	5.36	330.000	5.13
7	357.500	6.91	357.500	6.35
8	363.000	8.16	363.000	6.74
9	368.500	8.76	368.500	7.15
10	372.625	9.28	372.625	7.47
11	376.750	9.63	376.750	7.83
12	380.875	10.0	380.875	8.22
13	383.625	10.5	383.625	8.42
14			386.375	8.83
15			388.300	9.08
16			390.225	9.32
17			392.150	9.6
18			394.075	9.85

Pola retak yang terbentuk ditunjukkan oleh Gambar 4.7, dimana retak dibagian bawah balok menyebar hingga ke daerah tumpuan dan retak arah transversal tertinggi hanya terjadi pada daerah tengah bentang, hal tersebut disebabkan adanya tulangan sengkang yang dapat menghambat laju perambatan retak geser lentur, dimana retak geser lentur biasa terjadi pada daerah tumpuan. Jika diamati pola penyebaran retak balok ini dapat dianggap lebih merata dibanding balok J4, hal ini dapat terjadi karena tulangan yang *over reinforced* cenderung membuat retak-retak kecil yang menyebar.

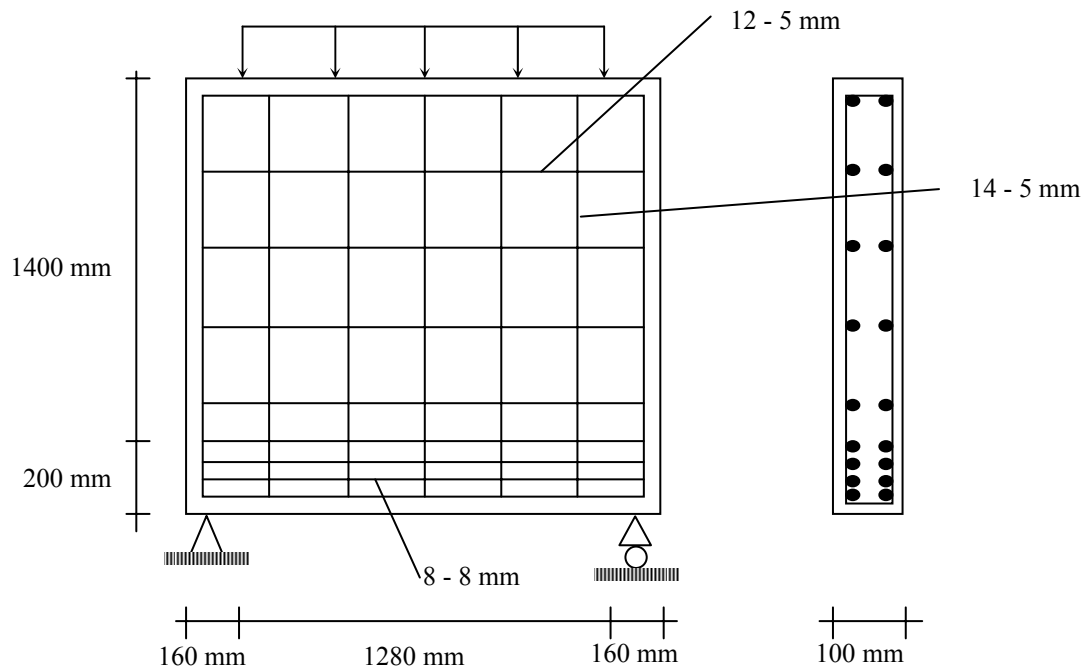


Gambar 4.7. Pola retak balok OA1 (42 elemen) saat terdeformasi

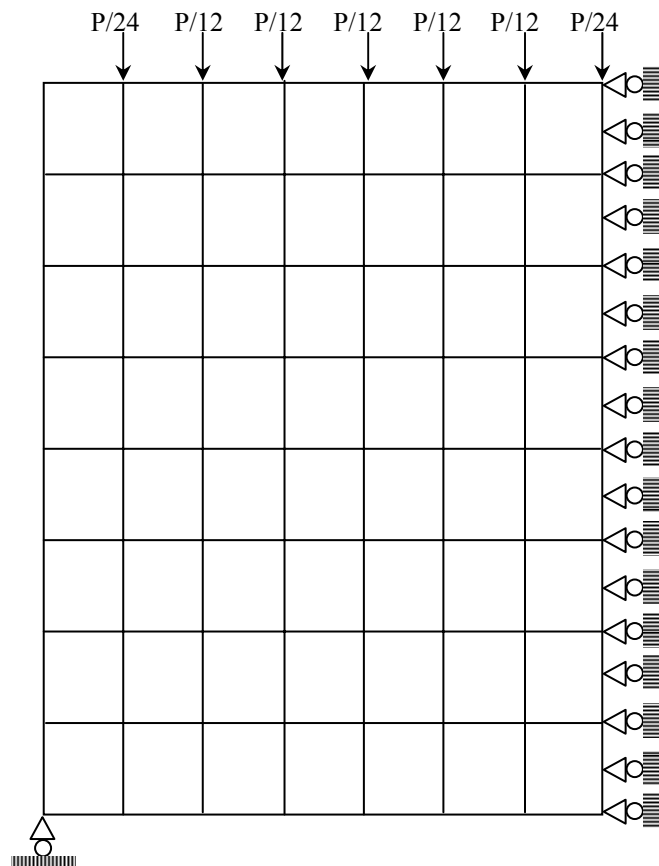
4.4. Balok tinggi

Balok tinggi adalah struktur beton bertulang yang mempunyai rasio panjang bentang terhadap tinggi penampang kurang dari 2.5 untuk struktur dua tumpuan dan kurang dari 2 untuk struktur menerus, Park dan Paulay (1975). Sampel balok tinggi yang digunakan dalam tesis ini diambil dari uji eksperimental yang dilakukan oleh Leonhardt dan Walther (1966), balok ini mempunyai bentang 1600 mm dan tinggi 1600 mm dengan ketebalan 100 mm yang ditumpu secara sederhana dan kemudian dibebani dengan beban merata pada tepi atasnya. Propertis material beton adalah sebagai berikut : kuat tekan beton $E_c = 25571$ MPa dengan kuat tekan $f'_c = 29.6$ MPa. Material baja tulangan mempunyai elastisitas $E_s = 200000$ MPa dengan tegangan leleh $f_y = 415$ MPa.

Pemodelan balok tinggi tersebut dibuat menjadi 40 elemen dan seluruh tulangan baik mendatar maupun tegak diasumsikan terdistribusi merata dalam elemen. Bentuk model dan beban yang simetris menyebabkan struktur ini dapat dianalisis setengah bentang dengan tujuan memperhalus diskritisasi struktur. Beban merata yang diterima struktur kemudian dijadikan beban titik pada tiap nodal elemen bagian paling atas, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.8.



Gambar 4.8. Balok tinggi, Leonhardt dan Walther (1966)



Gambar 4.9. Pemodelan balok tinggi (56 elemen)

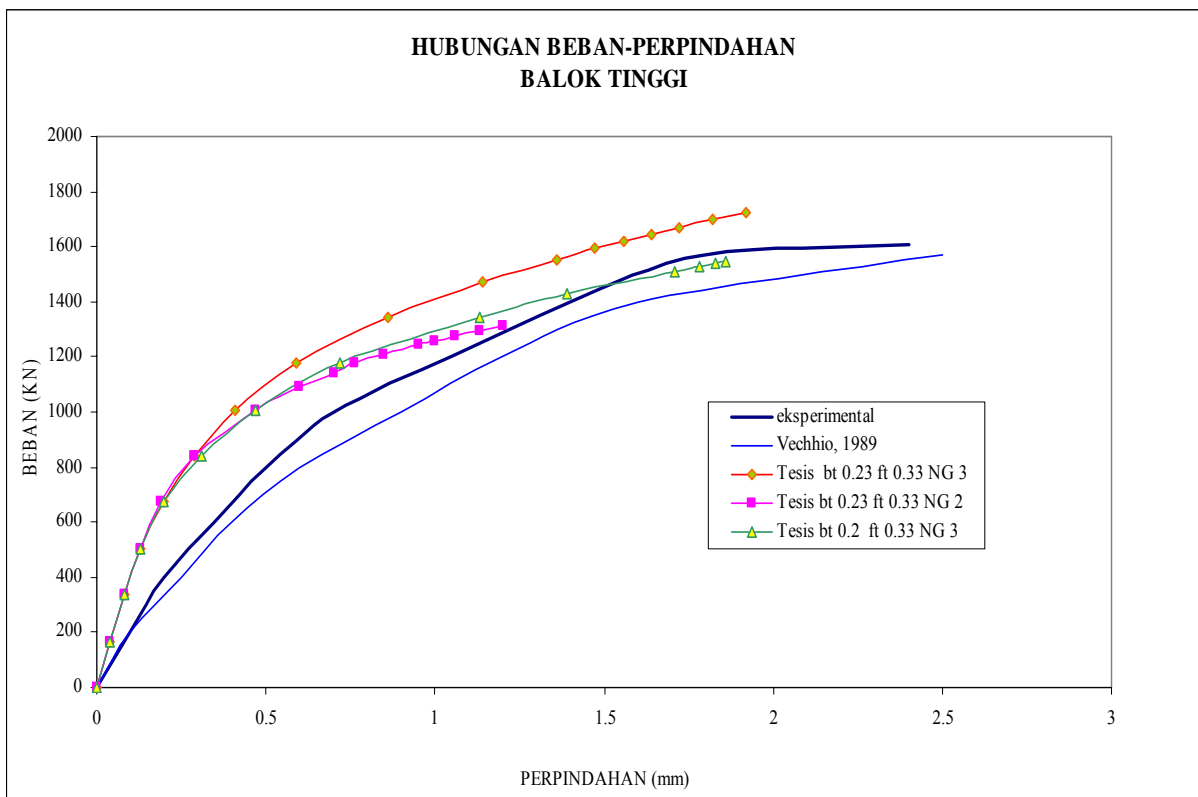
Selain dilakukan pengujian untuk mendapatkan nilai koefisien β yang mendekati respon sesungguhnya, sampel balok tinggi juga diuji terhadap dua titik *Gauss* yang berbeda yaitu 2×2 , 3×3 dan 4×4 dengan tujuan mengamati pengaruh jumlah *Gauss Point* terhadap ketepatan hasil analisis.

Setelah dilakukan pengujian didapatkan nilai β (koefisien geser) yang paling mendekati respon eksperimental yaitu 0.2, dengan inkrementasi beban seperti ditunjukkan pada tabel 4.7. Respon beban perpindahan yang diperoleh untuk nilai β 0.2 dan 0.23 secara keseluruhan memiliki kekakuan yang lebih besar dibandingkan hasil dari uji ekperimental hal ini dikarenakan beberapa faktor yang berperan dalam respon beton bertulang belum dimasukkan dalam tesis ini. Hal lain yang dapat diamati adalah semakin besar nilai β yang dibutuhkan untuk dapat mendekati hasil respon eksperimental, hal ini menunjukkan pada kasus dominasi geser memerlukan kekakuan geser yang lebih besar.

Pengujian dengan nilai β 0.23 kemudian dilakukan lagi dengan jumlah titik *Gauss* 2×2 , respon yang didapat memiliki kekakuan yang lebih kecil dibanding pada penggunaan titik *Gauss* 3×3 yang ditunjukkan oleh besarnya perpindahan yang terjadi, terutama setelah melewati level beban 400 KN, hal ini dikarenakan kurangnya titik *Gauss* yang dievaluasi dalam pembentukan matrik kekakuan elemen, pada titik *Gauss* 2×2 satu elemen dievaluasi terhadap 4 titik *Gauss* atau dengan kata lain satu elemen dibagi dengan 4 daerah evaluasi sementara pada titik *Gauss* 3×3 terdapat 9 titik *Gauss* atau satu elemen dibagi menjadi 9 daerah integrasi. Jika satu *Gauss point* telah mengalami retak maka titik tersebut mewakili luasan yang diintegrasikan dalam satu elemen, sehingga pada kasus *Gauss point* 2×2 hanya memerlukan 4 titik *Gauss* yang retak agar seluruh bagian dalam satu elemen menjadi elemen orthotropik. Oleh karena itu kekakuan struktur juga sangat dipengaruhi oleh banyak titik *Gauss* yang dievaluasi dalam pembentukan matrik kekakuan elemen. Pada spesimen yang menggunakan 16 titik *Gauss* memiliki kurva yang berhimpit dengan penggunaan 9 titik *Gauss*, hal ini menunjukkan bahwa pemakaian 9 titik *Gauss* sudah optimal untuk perhitungan elemen *quadrilateral* 8 titik nodal yang digunakan dalam tesis ini.

Tabel 4.5. Inkrementasi beban balok tinggi

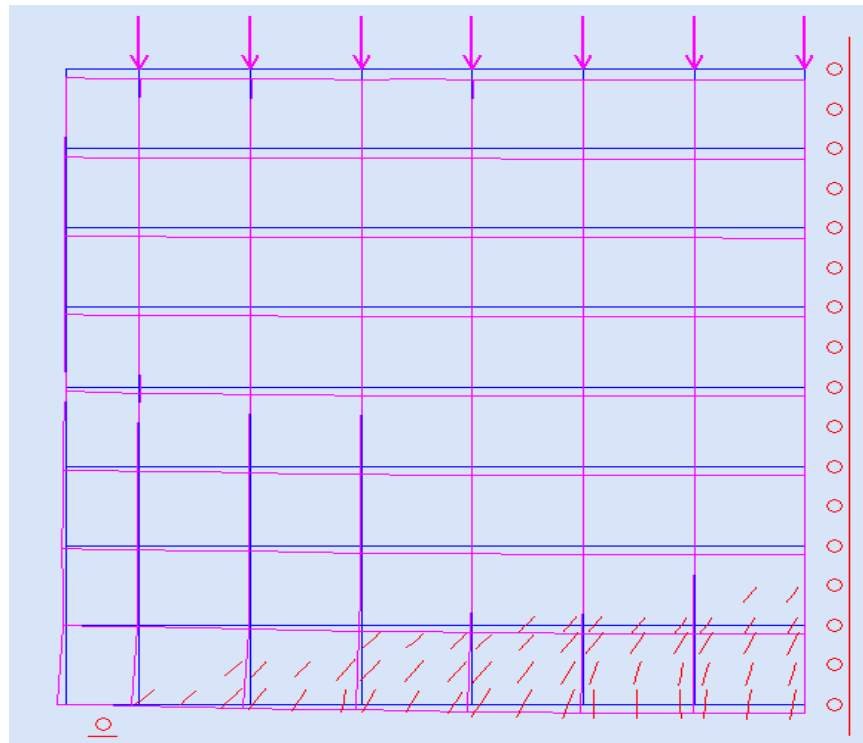
No.	Beta = 0.2		Beta = 0.23	
	Penambahan beban (N)	Kumultaif beban (N)	Penambahan beban (N)	Kumultaif beban (N)
1	168.000	168	168	168
2	168.000	336	168	336
3	168.000	504	168	504
4	168.000	672	168	672
5	168.000	840	168	840
6	168.000	1008	168	1008
7	168.000	1176	168	1176
8	168.000	1344	168	1344
9	126.000	1470	84	1428
10	84.000	1554	84	1512
11	42.000	1596	16.8	1528.8
12	25.200	1621.2	12.6	1541.4
13	27.200	1648.4	1.68	1543.08
14	23.000	1671.4		
15	25.400	1696.8		
16	25.200	1722		



Gambar 4.10. Hubungan beban-perpindahan balok tinggi

Tabel 4.6. Beban dan perpindahan balok tinggi

Inkrementasi beban	$\beta = 0.2$		$\beta = 0.23$	
	Beban (KN)	Kumulatif Perpindahan (mm)	Beban (KN)	Kumulatif Perpindahan (mm)
1	168.00	0.04	168.0	0.04
2	336.00	0.08	336.0	0.08
3	504.00	0.13	504.0	0.13
4	672.00	0.20	672.0	0.20
5	840.00	0.31	840.0	0.29
6	1008.00	0.47	1008.0	0.41
7	1176.00	0.72	1176.0	0.59
8	1344.00	1.13	1344.0	0.86
9	1428.00	1.39	1470.0	1.14
10	1512.00	1.71	1554.0	1.36
11	1528.80	1.78	1596.0	1.47
12	1541.40	1.83	1621.2	1.56
13	1543.08	1.86	1646.4	1.64
14			1671.6	1.72
15			1696.8	1.82
16			1722.0	1.92



Gambar 4.11. Pola retak balok tinggi

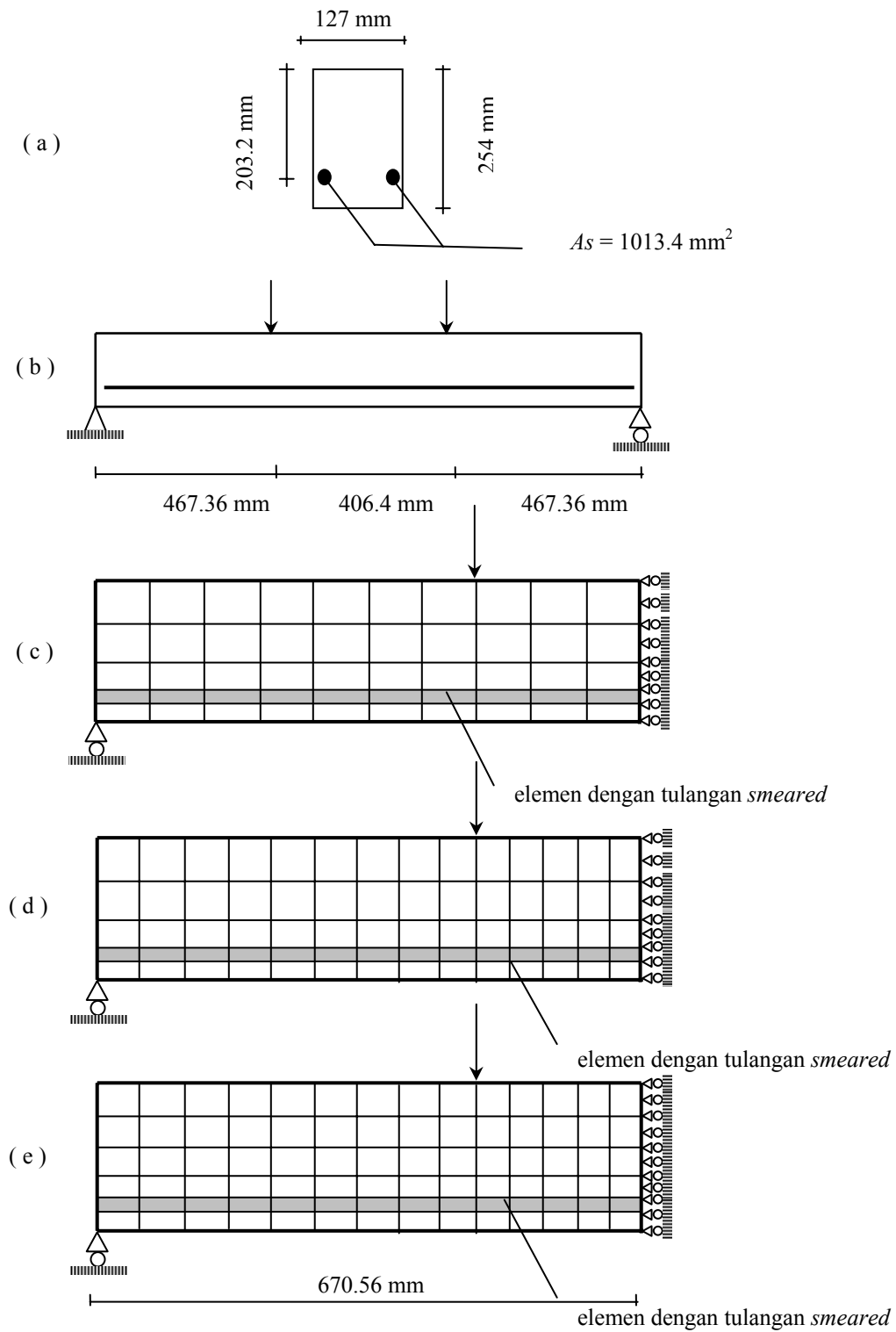
Pada daerah tengah bentang pola retak yang terjadi hampir tegak lurus terhadap garis netral, hal tersebut menunjukkan tegangan geser yang bekerja kecil atau mendekati nol, sementara pada daerah tumpuan retak terbentuk dengan kemiringan yang tajam karena tegangan geser yang terjadi sangat besar.

4.5. Balok Dominasi Geser (A4)

Struktur balok A4 merupakan salah satu sampel pengujian eksperimental yang dilakukan oleh Ahmad et al. (1986) yang kemudian dilakukan uji numerik yang dilakukan oleh beberapa peneliti antara lain Chung dan Ahmad (1994) serta Nuroji (2004). Struktur ini mempunyai dimensi penampang lebar 127 mm dan tinggi total 254 mm dengan tebal selimut beton 50.8 mm. Balok A4 ini diberi tulangan tunggal yaitu 2#8 dengan luas tulangan 1013.4 mm² tanpa menggunakan tulangan geser. Panjang bentang struktur dari sendi ke rol 1341.12 mm. Balok ini dikenakan dua beban terpusat yang simetris sehingga analisis cukup dilakukan setengah bentang.

Propertis material beton yang digunakan adalah kuat tekan beton $f'_c = 66.12$ MPa, modulus elastisitas beton $E_c = 35093$ MPa dan Poisson ratio $\nu = 0.2$ sedangkan propertis material baja adalah tegangan leleh $f_y = 413$ MPa dan modulus elastisitasnya $E_s = 200000$ MPa. Penampang dan perletakan tumpuan dan pembebanan struktur diperlihatkan seperti pada gambar 4.12. Struktur balok A4 selain ditulangi *over reinforced* juga mempunyai ratio $a/d = 2.3$, struktur demikian cenderung dominan berperilaku geser dibanding lentur.

Respon beban perpindahan untuk kedua nilai β menunjukkan hasil yang lebih kaku dari studi eksperimental, walaupun digunakan nilai koefisien β yang relatif kecil respon struktur yang diperoleh masih menunjukkan kekakuan yang sangat besar.



Gambar 4.12. Struktur balok A4

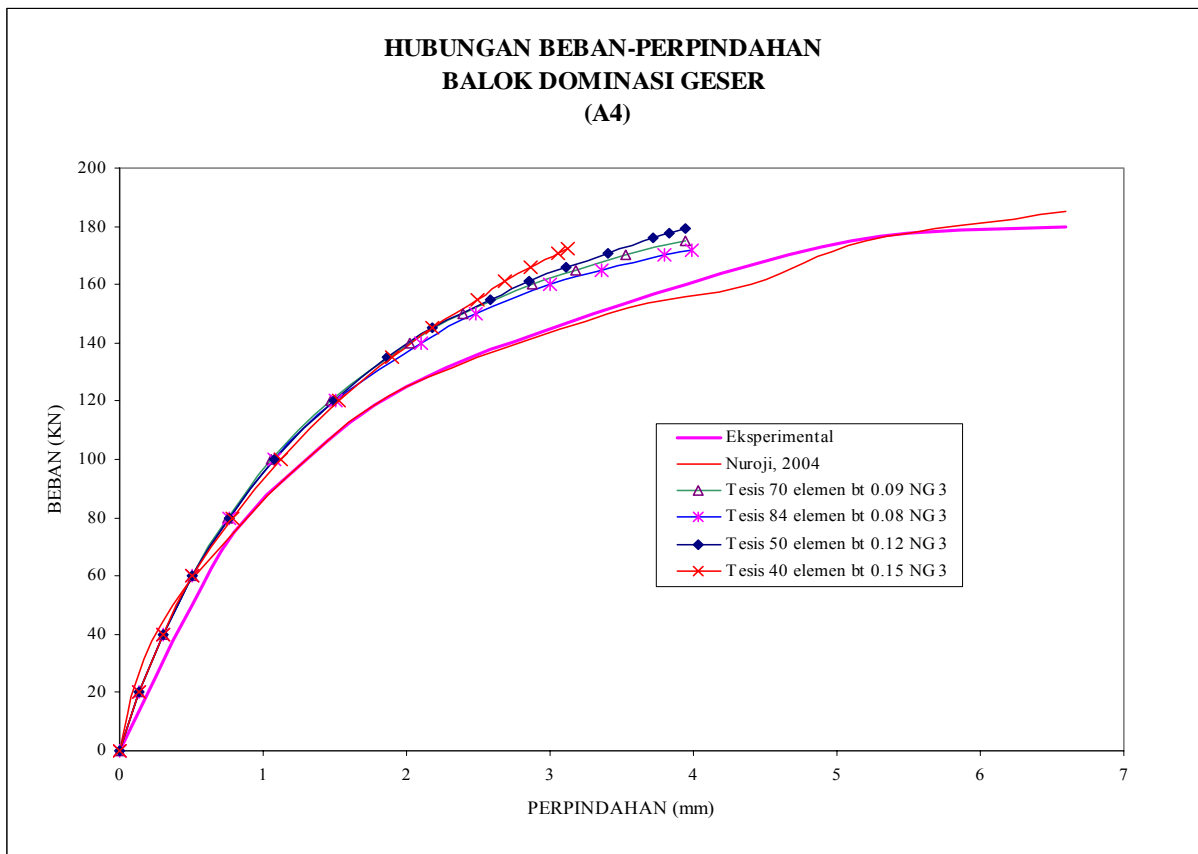
- (a) Penampang balok
- (b) Pembebanan
- (c) Diskritisasi balok A4 (50 elemen)
- (d) Diskritisasi balok A4 (70 elemen)
- (e) Diskritisasi balok A4 (84 elemen)

Balok yang mempunyai tulangan *over reinforced* seperti balok A4 akan mempunyai perilaku yang kaku sementara pemodelan retak dan tulangan *smeared* juga memiliki kekakuan yang lebih besar dibanding pada pemodelan *discrete*, sehingga hal ini menyebabkan respon struktur yang dihasilkan akan lebih kecil. Hal ini nampak dari kurva yang ditunjukkan pada gambar 4.13 dimana mulai dari awal pembebanan kedua kurva memiliki kemiringan yang lebih tegak yang menunjukkan bahwa kekakuan model sangat besar dan perpindahan pada beban puncak jauh lebih kecil dibandingkan hasil dari studi eksperimental.

Respon balok A4 dengan menggunakan jumlah diskrit 40 elemen menunjukkan perpindahan maksimum lebih kecil dibanding perpindahan maksimum pada diskrit 50 elemen akan tetapi diskritisasi struktur 50 dibandingkan dengan 70 dan 84 elemen menunjukkan perilaku beban perpindahan yang hampir sama. Hal ini menunjukkan bahwa diskritisasi tersebut sudah mendekati optimum. Nilai β dari keempat model diskritisasi elemen adalah 0.15, 0.12, 0.09 dan 0.08 untuk diskrit 40, 50, 70 dan 80 elemen secara berturut-turut.

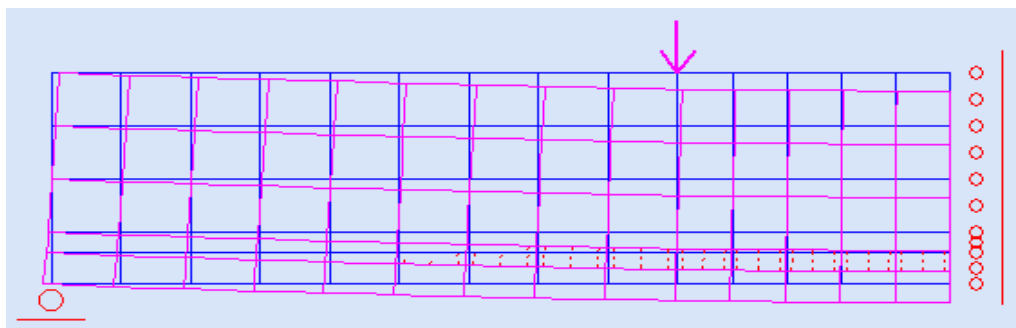
Respon struktur dominasi geser seperti balok tinggi dan balok A4 menunjukan deviasi yang lebih besar dibandingkan dengan struktur dengan dominasi lentur seperti balok J4 dan OA1, hal ini dikarenakan tulangan struktur dengan dominasi geser mengalami degradasi kekakuan yang diakibatkan pengaruh *dowel action*, sementara dalam pendekatan *smeared element* tulangan diasumsikan tersebar merata dalam beton dan kekakuan tulangan dimasukkan ke dalam kekakuan beton sehingga tidak terpengaruh oleh *dowel action*.

Retak pertama kali terbentuk pada pembebanan 20 KN dan terjadi pada elemen yang memiliki tulangan, hal ini dikarenakan terbentuknya retak didasari oleh terlampauinya tegangan tarik sementara elemen yang mempunyai tulangan memiliki kekakuan yang lebih besar dibanding elemen yang tidak memiliki tulangan sehingga tegangan yang terjadi pada elemen ini menjadi lebih besar dibanding elemen yang tidak memiliki tulangan. Pola retak pada beban awal menunjukkan arah yang tegak lurus di daerah momen murni, akan tetapi seiring dengan bertambahnya beban retak yang timbul tidak tegak lurus hal tersebut menunjukkan adanya pengaruh konsentrasi tegangan terutama di sekitar beban terpusat. Inkrementasi beban setelah 160 KN tidak menunjukkan penambahan retak hanya terjadi penambahan perpindahan sampai mencapai beban ultimit seperti ditunjukkan pada gambar 4.14.

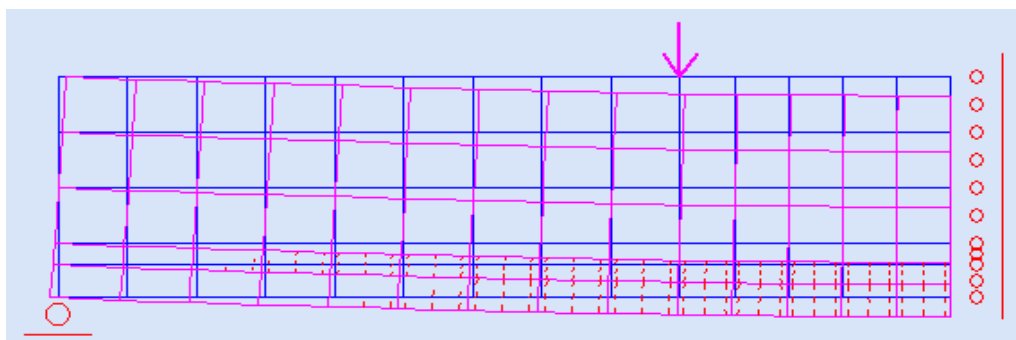


Gambar 4.13 Hubungan beban-perpindahan balok A4

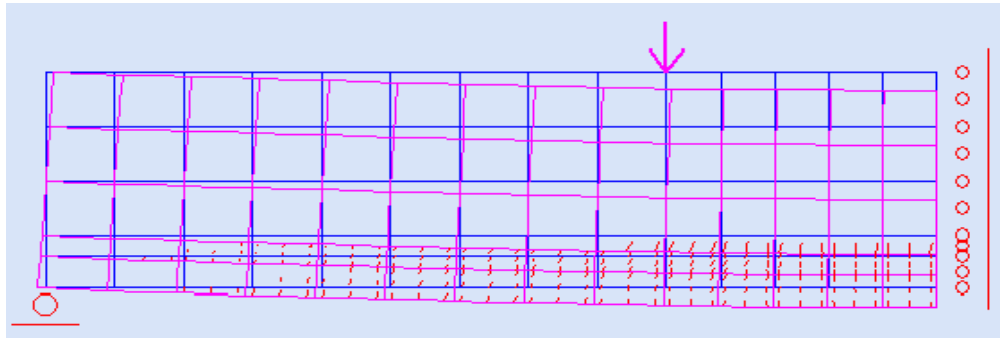
20 KN



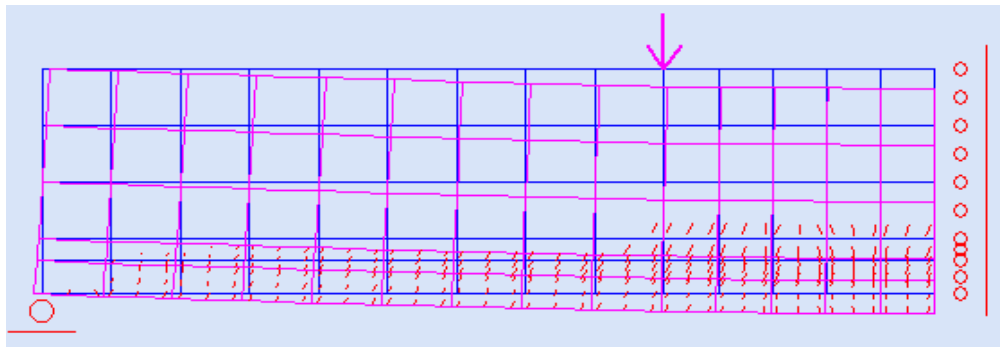
40 KN



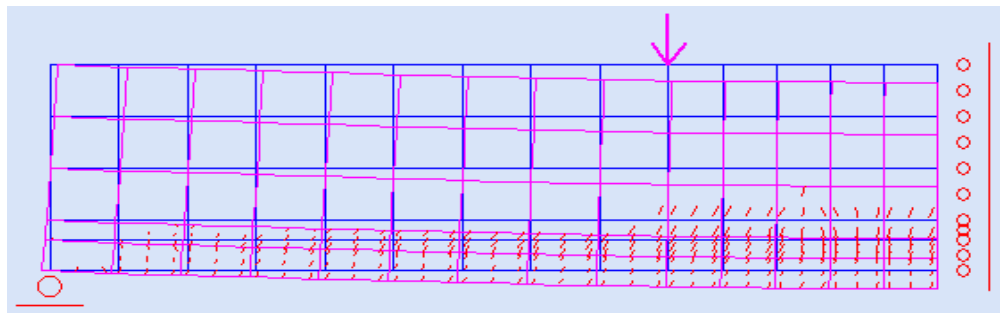
60 KN



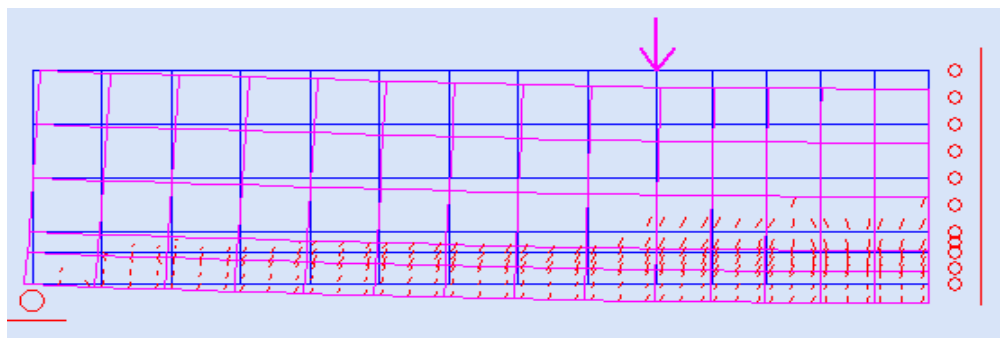
100 KN



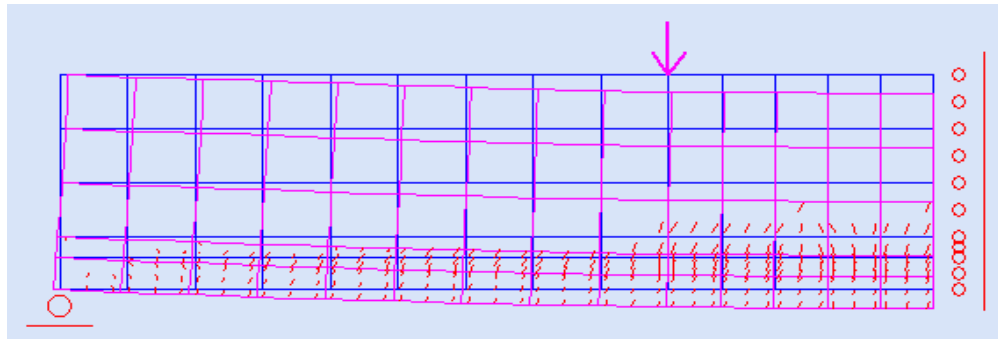
140 KN



160 KN



175 KN

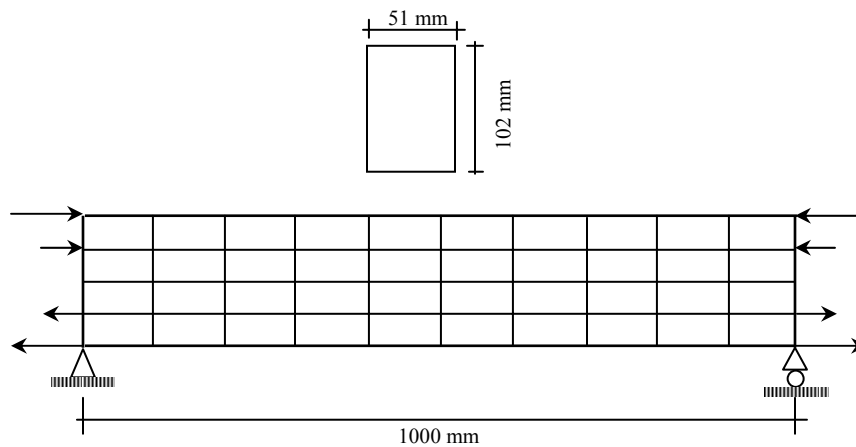


Gambar 4.14. Pola retak balok A4 saat terdeformasi

4.6. Balok Lentur Murni

Tujuan dari penyelidikan balok lentur murni adalah untuk mengetahui pola retak yang terbentuk ketika suatu struktur beton bertulang hanya menerima tegangan normal tanpa terpengaruh adanya tegangan geser. Sampel balok lentur murni yang digunakan merupakan studi numerik dengan validasi pola retak berdasar pada tinjauan pustaka. Struktur ini diletakkan secara sederhana dengan tumpuan sendi dan rol serta mempunyai propertis material sebagai berikut, kuat tekan beton $f'_c = 38$ MPa, modulus elastisitas beton $E_c = 28973$ MPa dan Poisson ratio $\nu = 0.2$. Penampang, tumpuan dan pembebanan struktur diperlihatkan pada gambar 4.15.

Pembebanan yang diberikan pada struktur merupakan menggunakan dua gaya yang saling berlawanan yang membentuk kopel dengan suatu jarak tertentu. Beban titik yang merupakan gaya tarik dan tekan diberikan pada kedua daerah tumpuan sendi dan rol. Sumbu netral balok diasumsikan berada pada setengah tinggi balok, besarnya momen lentur yang diterapkan pada struktur dapat dihitung dengan cara mengalikan beban terpusat dengan lengan kopel.

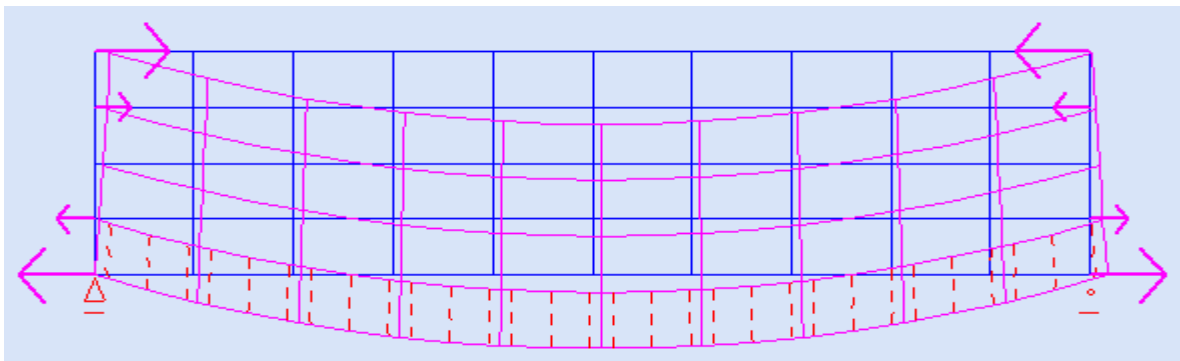


Gambar 4.15. Penampang dan diskritisasi balok lentur murni 40 elemen

Tabel 4.7. Inkrementasi beban balok lentur murni

No.	Penambahan beban (N)	Momen (Nmm)	Kumulatif Momen (Nmm)
1	2.000.00	255.000.00	255.000.00
2	500.00	63.750.00	318.750.00
3	500.00	63.750.00	382.500.00
4	500.00	63.750.00	446.250.00
5	500.00	63.750.00	510.000.00
6	240.00	30.600.00	540.600.00

Pola retak yang terbentuk dapat dilihat pada gambar 4.16, arah retak tegak lurus terhadap sumbu mendatar balok hal ini dikarenakan tidak adanya tegangan geser yang bekerja sepanjang bentang struktur, dengan tidak adanya regangan geser maka regangan utama tarik sejajar dengan sumbu mendatar dan arah retak menjadi tegak lurus arah regangan tarik, hal ini sesuai dengan tinjauan pustaka yang dibahas dalam bab sebelumnya.

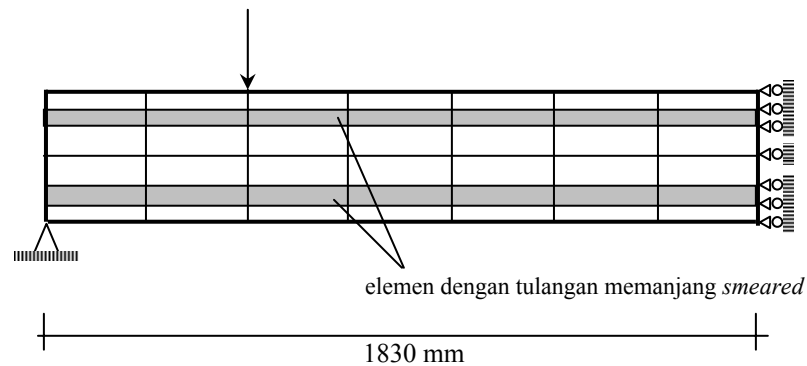


Gambar 4.16. Pola retak balok lentur murni saat terdeformasi

4.7. Balok Lentur Geser

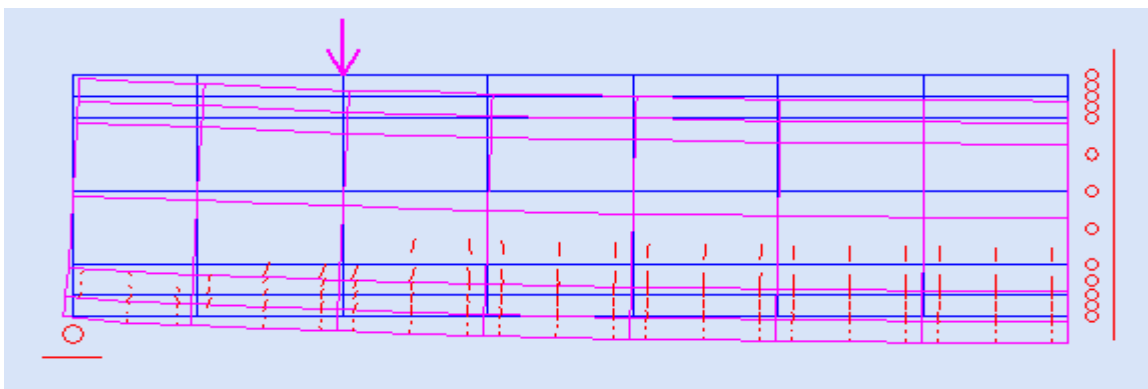
Tujuan dari pengujian ini adalah memperlihatkan pola retak yang terbentuk di daerah momen konstan pada balok yang dibebani oleh dua beban titik selain itu menguji pengaruh beban terpusat pada arah retak yang terbentuk.

Penampang struktur balok yang diuji adalah balok OA dengan dua buah beban titik.



Gambar 4.17. Struktur balok lentur geser

Pola retak yang terbentuk menunjukkan adanya pengaruh dari beban terpusat yaitu pada daerah momen murni, retak yang terbentuk mengalami kemiringan yang menandakan masih terdapatnya tegangan geser yang bekerja akan tetapi semakin menjauhi lokasi beban terpusat kemiringan menjadi semakin tegak yang menandakan berkurangnya pengaruh beban terpusat.



Gambar 4.18. Pola retak balok lentur geser

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Beton sebagai material yang secara mikro terdiri dari beberapa komponen yang tidak homogen menjadi suatu kendala dalam memprediksi perilaku yang sebenarnya, demikian halnya yang terjadi dalam analisis beton bertulang menggunakan metode numerik banyak terdapat variabel-variabel yang menentukan respon struktur beton bertulang tetapi belum dapat dimasukkan dalam studi kali ini.

Hasil analisis menunjukkan bahwa respon beban perpindahan struktur dengan dominasi lentur dapat dikatakan mendekati hasil studi eksperimental sementara pada kasus yang didominasi geser respon beban perpindahan menunjukkan deviasi yang lebih besar, hal ini disebabkan beberapa parameter analisis yang belum dimasukkan dalam penelitian ini seperti *bond slip* dan *dowel action*.

Model *smeared crack* mampu menunjukkan pola dan propagasi retak pada struktur balok beton bertulang yang cukup representatif. Hal ini dibuktikan pada kasus balok lentur murni dimana arah retak tegak lurus terhadap sumbu memanjang balok. Deviasi pola dan arah retak di daerah konsentrasi tegangan menunjukkan pengaruh distribusi tegangan geser pada analisis *finite element* yang menggunakan elemen bidang dua dimensi, fenomena ini tidak diakomodir pada analisis *finite element* yang menggunakan elemen batang satu dimensi.

Hasil analisis non-linier struktur beton bertulang dengan model *smeared crack* dan *smeared element* dipengaruhi besarnya koefisien geser β yang dimasukkan sebagai salah satu parameter analisis. Jika koefisien geser yang diberikan tidak tepat maka respon beban perpindahan akan menjauhi hasil uji eksperimental, oleh sebab itu dilakukan beberapa pengujian dengan memasukkan nilai koefisien geser yang berbeda untuk mendapatkan respon beban perpindahan yang mendekati hasil uji eksperimental.

5.2. Saran

Koefisien geser β merupakan parameter yang mengikuti variasi tegangan geser, pada saat struktur beton mencapai retak awal koefisien geser akan bernilai maksimum, seiring dengan meningkatnya tegangan geser nilai tersebut menurun, variasi nilai β dipengaruhi antara lain adanya ikatan antar agregat pada posisi beton retak. Belum adanya penelitian secara khusus yang membahas variasi koefisien geser menyebabkan penelitian ini menggunakan nilai β yang tetap, oleh karena itu dapat dikembangkan suatu metode baik eksperimental maupun numerik untuk mendapatkan suatu fungsi yang menghubungkan koefisien geser dengan tegangan geser.

Degradasi kekakuan struktur akan bertambah ketika terjadi pelepasan tegangan dari beton ke tulangan pada beton retak, hal ini dipengaruhi oleh mekanisme lekatan antara tulangan dan beton. Hilangnya lekatan tulangan dan beton akan menimbulkan *bond slip* sehingga terjadi penurunan kekakuan struktur. Hal tersebut belum dapat diterapkan dalam penelitian ini, oleh sebab itu dapat dikembangkan suatu metode yang dapat mengakomodir pengaruh *bond slip*.

Diskritisasi elemen merupakan salah satu faktor yang menentukan ketelitian hasil analisis, disarankan menambahkan beberapa *sub routine* dalam program agar diskritisasi elemen dapat dibuat secara otomatis.

DAFTAR PUSTAKA

1. Abrishami, Homayoun H. and Mitchell, Denis (1996), Influence of Splitting Crack on Tension Stiffening, ACI Structural Journal, November-December.
2. Arafa, Mohammed. and Mehlhorn, Gerhard. (1998), A Modified Discrete Model in The Nonlinear Finite Element Analysis of Prestressed and Reinforced Concrete Structure, University of Kassel, Department of Structural Concrete, Kassel, Germany.
3. Bathe, Klaus-Jurgen. (1982), Finite Element Procedure in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Inc.
4. Cervenka, Vladimir. and Cervenka, Jan. (2003), Computer Simulation as a Design Tool for Concrete Structure, The Second International Conference in Civil Engineering on Computer Application, Research and Practice, Bahrain.
5. Cervenka, Vladimir. Computer Simulation of Failure of Concrete Structure for Practice, Cervenka Consulting, Prague, Czech republic.
6. Chen, W.F. (1982), Plasticity in Reinforced Concrete, McGraw-Hill Book Company.
7. Cook, Robert D. and Young, Warren C. (1985), Advance Mechanic of Materials, Macmillan Publishing Company.
8. Cook, Robert D, Alih Bahasa Bambang Suryatmono (1998), Konsep dan Aplikasi Metode Elemen Hingga, PT. Refika Aditama, Bandung.

9. Cook, Robert D., Malkus, Davids S., Plesha, Michael E. and Witt, Robert J. (2002), Concepts and Application of Finite Element Analysis, John Wiley and Son, Inc.
10. Kotsovost, Michael D. (1984), Behavior of Reinforced Concrete Beams with a Shear Span to Depth Ratio Between 1.0 and 2.5, ACI Journal, May-June.
11. Kwak, H. G. and Filippou, Fillip C. (1990), Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structure Under Monotonic Loads, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, November.
12. Kwak, H. G. and Filippou, F. C. (1997), Nonlinear FE Analysis of R/C Structure Under Monotonic Loads, Computer and Structures, Vol. 65.
13. Nawy, Edward G. Alih Bahasa Bambang Suryoatmono (1985), Beton Bertulang Suatu Pendekatan Dasar, Eresco.
14. Ngo, D. and Scordelis, A.C. (1967), Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, ACI Journal, March.
15. Nuroji (2004), Penggabungan Model *Smeared* dan *Discrete Crack* Pada Analisis Struktur beton Bertulang Dengan Memperhitungkan Pengaruh *Bond-Slip*, Disertasi S3, Jurusan Teknik sipil, ITB.
16. Owen D. R. J and Hinton E. (1980), Finite Element in Plasticity : Theory and Practice, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.
17. Park, R. and Paulay, T. (1975), Reinforced Concrete Structure, John Wiley and Sons.

18. Rendy Thamrin, Oni Guspari dan Dicky R. Munaf (1997), Pemakaian *Smeared Model* Untuk Analisis Lentur Pada Balok-T yang Terbuat dari Beton Mutu Tinggi, Seminar Metode Element Hingga, Jurusan Teknik Mesin, ITB.
19. State of the Art Report, Finite Element Analysis of reinforced Concrete, American Society of Civil Engineers.
20. Vecchio, Frank J. (1989), Nonlinier Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Membranes, ACI Structural journal, January-February.
21. Vecchio, Frank J. and Collin, Michael P. (1986), The Modified Compression Theory for Reinforced Concrete Element Subjected to Shear, ACI Journal, March-April.
22. Vecchio, Frank J. and Collin, Michael P. (1988), Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory, ACI Structural Journal, May-June.
23. Wiryanto Dewobroto (2004), Aplikasi Sain dan Teknik dengan Visual Basic 6.0, Elex Media Komputindo.